第19回組合せ論若手研究集会
招待講演者アブストラクト

開催日：2022 年 2 月 17 日（金），18 日（土）

2 月 17 日（金）　松下 尚弘 氏（琉球大学）

「染色数および単体複体の埋め込み可能性について」

超グラフ H が与えられたとき，超グラフの超辺を頂点とし，二つの超辺が共通部分を持たないとき辺が張られていると考えることで新たなグラフが得ることができる．このようにして得られるグラフを，超グラフ H から得られる Kneser 型のグラフといい，$KG(H)$ で表す．例えば，超グラフとして，$[n] = \{1, \ldots, n\}$ を頂点集合とし，$[n]$ の k-元部分集合全体を超辺の集合とした場合，得られる Kneser 型のグラフは通常の Kneser グラフである．一方で，超グラフ H からは，H の超辺を含まないような H の頂点集合の部分集合全体を考えることで，単体複体が得られ，これを H の独立複体という．

Kneser 型のグラフ $KG(H)$ の染色数と，独立複体 $I(H)$ のユークリッド空間への埋め込み可能性との間には，ある密接な関係があることが Sarkaria の一連の研究によって見出されている．その系として，Kneser グラフの染色数の決定（Lovász–Kneser の定理）や，$(2d+2)$-単体の d-骨格が $2d$-次元のユークリッド空間に埋め込むことができないという，位相幾何学における重要事実（van Kampen–Flores の定理）が直ちに得られる．本講演では，単体複体のユークリッド空間への埋め込みの基本的な事実の説明から，Sakaria の研究，およびその現代における発展について概説する．

2 月 18 日（土）　清水 伸高 氏（東京工業大学）

「左右ケイリー複体に基づく局所検査符号」

メッセージに冗長性を持たせてノイズに対する頑健性を付与する手法を誤り訂正符号 (または単に符号) という. 数学的には符号は有限体上のベクトル空間の部分空間として定義され, その元を符号語という. 符号には以下の二つの性質が望まれる:

1. 任意の相異なる二つの符号語のハミング距離が大きい.
2. 部分空間としての次元が大きい.

1 と 2 の性質はトレードオフの関係にあり, 組合せ論的にはそれらを両立させる符号が興味の対象となる. 加えて計算量理論では

3. 文字列が与えられたときにそれが符号語であるかどうかが効率的に判定できる

という性質も重要視されている. この三つの性質を全て兼ね備えた符号の存在は 30 年近く未解決であり, そのような符号は計算量理論において確率的検証可能証明 (PCP) の手法と密接に関連している. 近年, [Dinur, Evra, Livne, Lubotzky, Mozes, 2022] はこの未解決問題を肯定的に解決した. 彼女らは, ケイリーグラフを立方複体に自然に拡張した左右ケイリー立方複体を導入し, それに基づく新たな符号を提案した. この符号は [Sipser and Spielman, 1996] によるエクスパンダーグラフに基づく符号 (エクスパンダー符号) の自然な拡張である. 本発表は符号に関する基本的な事項を説明した上でこのブレイクスルーの結果とその証明を解説する.