組合せゲーム理論の世界を楽しむ

第20回組合せ論若手研究集会　招待講演（於　慶応大学）

末續鴻輝

国立情報学研究所　特任研究員

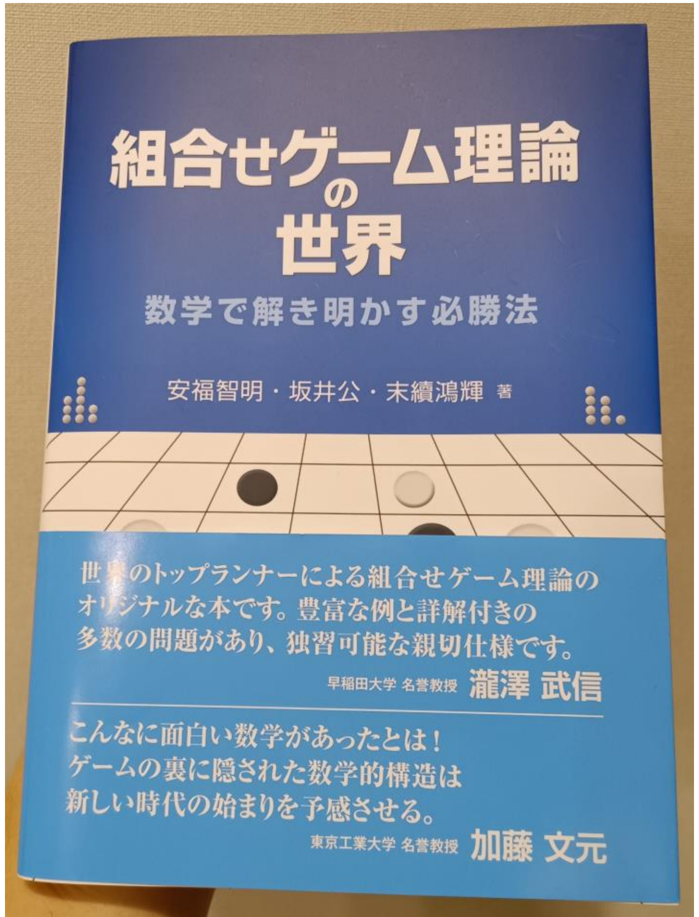
早稲田大学ゲームの科学研究所　招聘研究員

日本組合せゲーム理論研究集会　代表

著書宣伝

- 安福智明，坂井公，末續鴻輝：組合せゲーム理論の世界ー数学で解き明かす必勝法ー

- 2024年2月28日販売開始
（すでに手元に著者分が来ました）



本講演の概要

- 序　組合せゲーム理論とは
- 第１部　正規形不偏ゲームについて
- 第２部　正規形非不偏ゲームについて
- 第３部　さらなる発展と最近の研究
- おわりに

本講演の概要

- **序　組合せゲーム理論とは**
- 第１部　正規形不偏ゲームについて
- 第２部　正規形非不偏ゲームについて
- 第３部　さらなる発展と最近の研究
- おわりに

序　組合せゲーム理論とは

組合せゲーム理論とは？

- 次の２条件を満たすゲームの（必勝戦略保持者に関わる）数学的な構造を探る理論

＜確定性＞…「サイコロを振る」などの偶然の要素を含まない

＜完全情報性＞…ゲームの進行において、「山札」や「手札」などの伏せられた情報がない

組合せゲーム理論とは？

- さらに、次の４条件を課すこともある

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

これらの４条件を課すと扱いやすい構造を持つため、まずはこの４条件のもとでの話から入ることが多い。ただし、４条件を変えた場合も研究されているので少しだけ触れておく

組合せゲーム理論とは？

- さらに、次の４条件を課すこともある

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

（G1）の条件を外した研究に、３人（以上）プレイヤーのゲーム、特定の条件下で連続着手のあるゲーム（伴課ゲーム）、パスのあるゲーム、などの研究がある。

組合せゲーム理論とは？

- さらに、次の４条件を課すこともある

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

（G2）の条件を外した研究に、逆形ゲーム（着手できなくなったプレイヤーの勝ち）や得点付きゲーム（得点の多い方が勝ち）の研究がある

組合せゲーム理論とは？

- さらに、次の４条件を課すこともある

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

（G3）の条件を外した研究に、ルーピーゲーム（同型反復のあるゲーム）の研究などがある。

組合せゲーム理論とは？

- さらに、次の４条件を課すこともある

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

（G4）の条件を外した研究に、超限ゲームの研究などがある。

組合せゲーム理論とは？

- さらに、次の４条件を課すこともある

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

（G3）（G4）の条件をともに満たすゲームを**ショートゲーム**と呼ぶ。

組合せゲーム理論とは？

- さらに、次の４条件を課すこともある

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

本講演では、「第３部　さらなる発展と最近の研究」を除き、上記の４条件を仮定したゲームの解析について論じる。

組合せゲーム理論とは？

組合せゲーム理論の基本定理：

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

をすべて満たすゲームの任意の局面において、２人のプレイヤーちただ１人が必勝戦略を持つ。

組合せゲーム理論の目標とは？

- ゲームの中に潜む数学、主に、与えられた局面に対して、**どちらのプレイヤーに必勝戦略があるか**を判定する問題にかかわる数学的構造を調べる

- 主なアプローチの１つに、局面を勝敗関係に影響を与えない同値類に分け、その商集合上の演算規則を調べることで、必勝者判定に利用する、という方針がある。

組合せゲーム理論の目標とは？

- 局面全体の集合$\widetilde{\mathbb{X}}$
- 帰結類（必勝戦略保持者による分類）$\mathbb{O}$
- 局面から帰結類への写像o
- 局面同士の**直和**演算子$+$

- 局面$G, H \in \widetilde{\mathbb{X}}$について、任意の$X \in \widetilde{\mathbb{X}}$に対して$\mathrm{o}(G + X) = o(H + X)$のとき$G =_{\widetilde{\mathbb{X}}} H$とする。

組合せゲーム理論の目標とは？

- 各局面$G \in \tilde{\mathbb{X}}$について、同値類$[G]_{=_{\tilde{\mathbb{X}}}}$がとれ、同値類の集合、すなわち$\tilde{\mathbb{X}}$を$=_{\tilde{\mathbb{X}}}$で割った商集合$\mathbb{X} = \tilde{\mathbb{X}}/_{=_{\tilde{\mathbb{X}}}}$が取れる。
- 演算＋は同値類同士の演算として定義することができるので、集合$\mathbb{X}$における演算＋の性質を見ることでもとの局面の解析に反映できる

※何を言っているかわかりにくいと思うので第１部で具体例が出た時点で復習します

本講演の概要

- 序　組合せゲーム理論とは
- **第１部　正規形不偏ゲームについて**
- 第２部　正規形非不偏ゲームについて
- 第３部　さらなる発展と最近の研究

第１部
正規形不偏ゲームについて

前編：ニムとグランディ数

不偏ゲーム

４条件

（G1）２人のプレイヤーが交互に着手する

（G2）自分の手番で着手できなくなったプレイヤーの負け

（G3）ゲームは必ず有限手数で終了する

（G4）各局面での可能な着手は有限個である

に加え、盤面に対して可能な着手がプレイヤーによって異ならないゲーム（以下で紹介するニムなど）を**不偏ゲーム（impartial game）**と呼ぶ。

※囲碁や将棋は盤面に対して打てる石の色や動かせる駒がプレイヤーによって異なるので不偏ゲームではない。

不偏ゲームの基本的な性質

- 不偏ゲームの任意の局面は、
  $\mathcal{P}$局面（直前の手番のプレイヤー（後手）に必勝戦略のある局面）
  または
  $\mathcal{N}$局面（現在の手番のプレイヤー（先手）に必勝戦略のある局面）
  のいずれかに分類される。

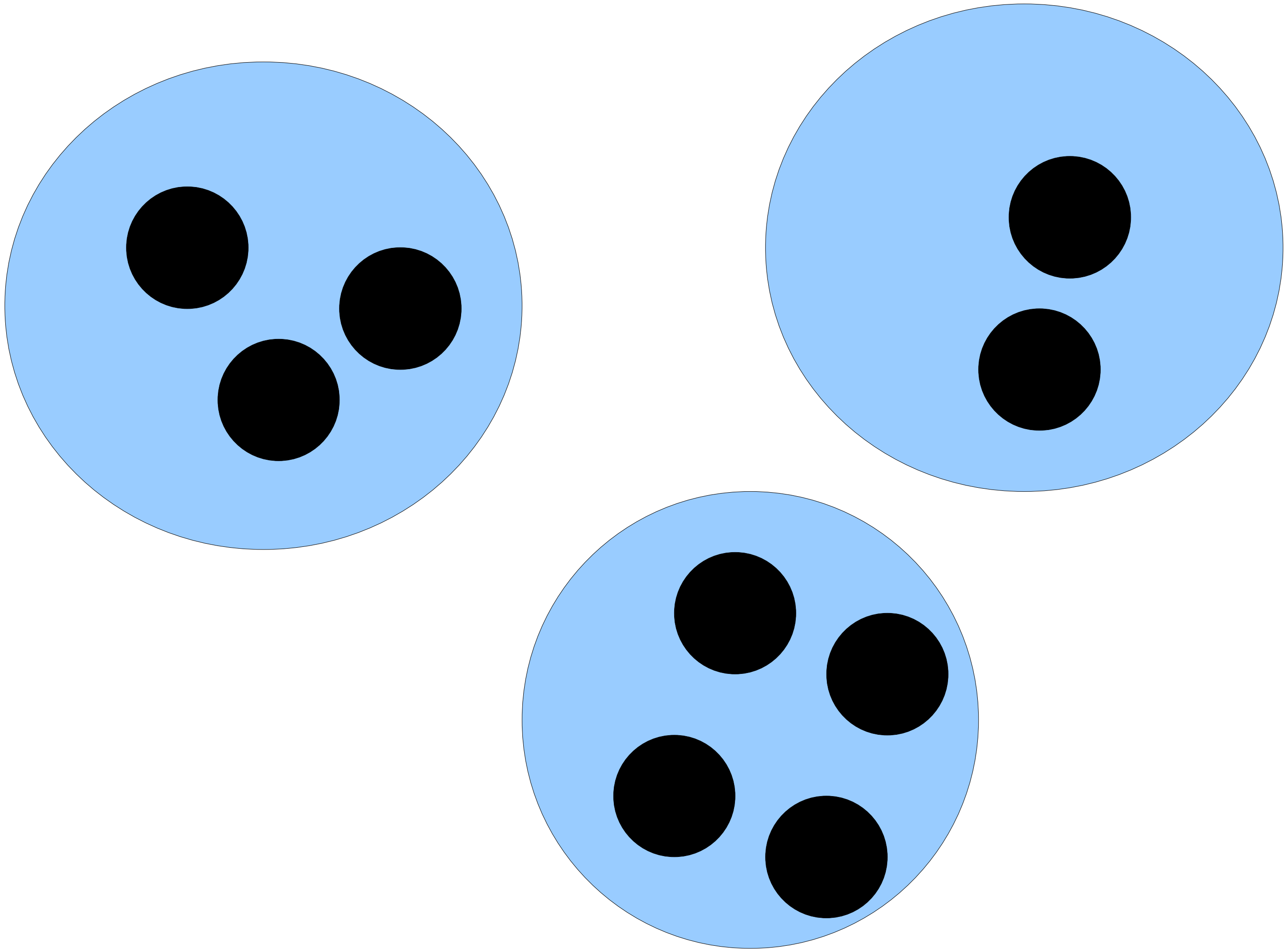
- 局面Gから一手で遷移可能な任意の局面G'が$\mathcal{N}$局面ならば、Gは$\mathcal{P}$局面である。特に、Gが終了局面のときGは$\mathcal{P}$局面である。
- 局面Gから一手で遷移可能なある局面G'が$\mathcal{P}$局面ならば、Gは$\mathcal{N}$局面である。

不偏ゲームの例：ニム

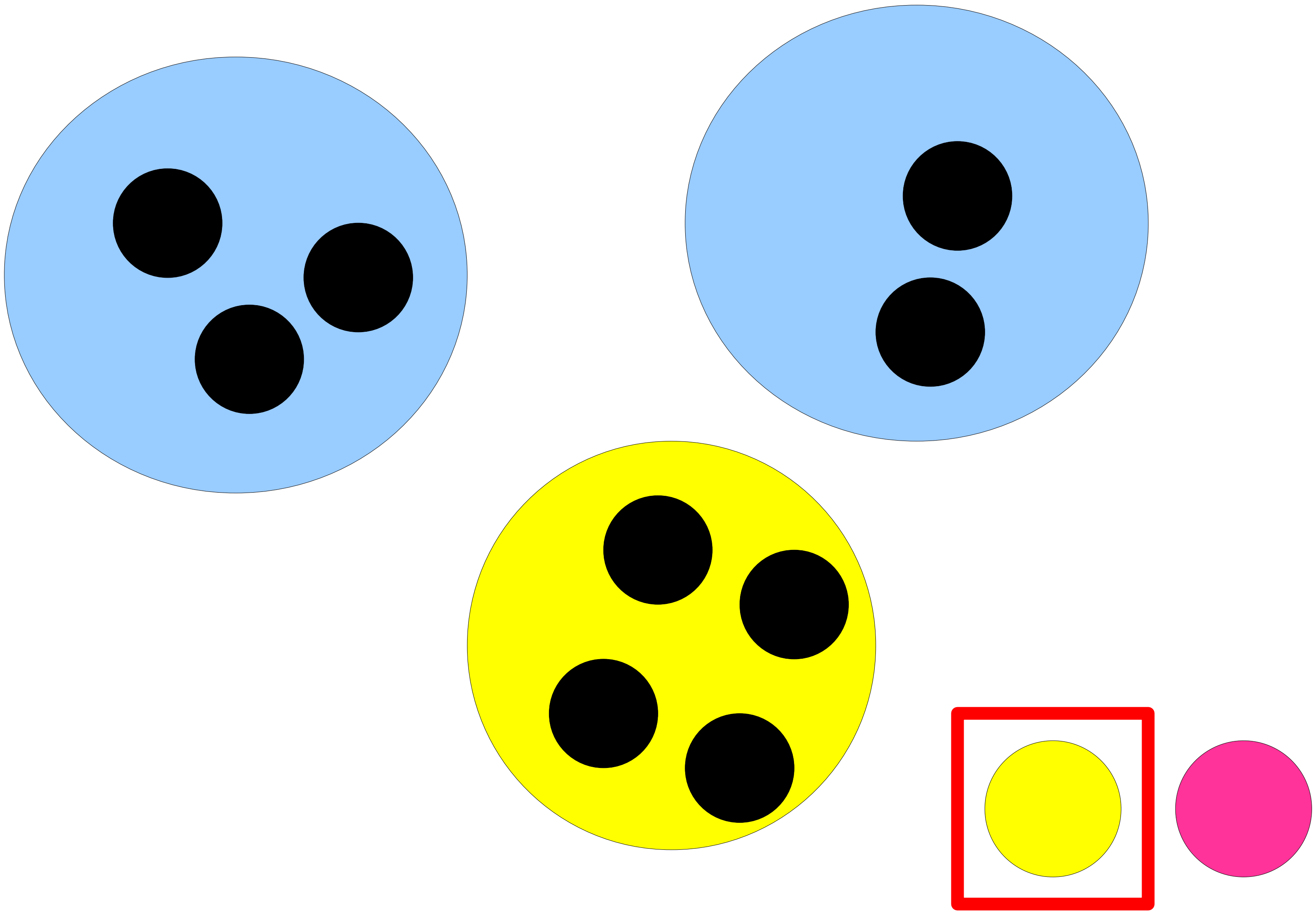
ニム（NIM）

- 石をいくつか集めてできた１つの塊を山と呼び、その山をいくつか用意する。
- ２人のプレイヤーが交互に着手する。
- プレイヤーが可能な着手は、１つの山を選んで、その山から１つ以上の石を取り除くこと。
- 最後に石を取ったプレイヤ―の勝ち。

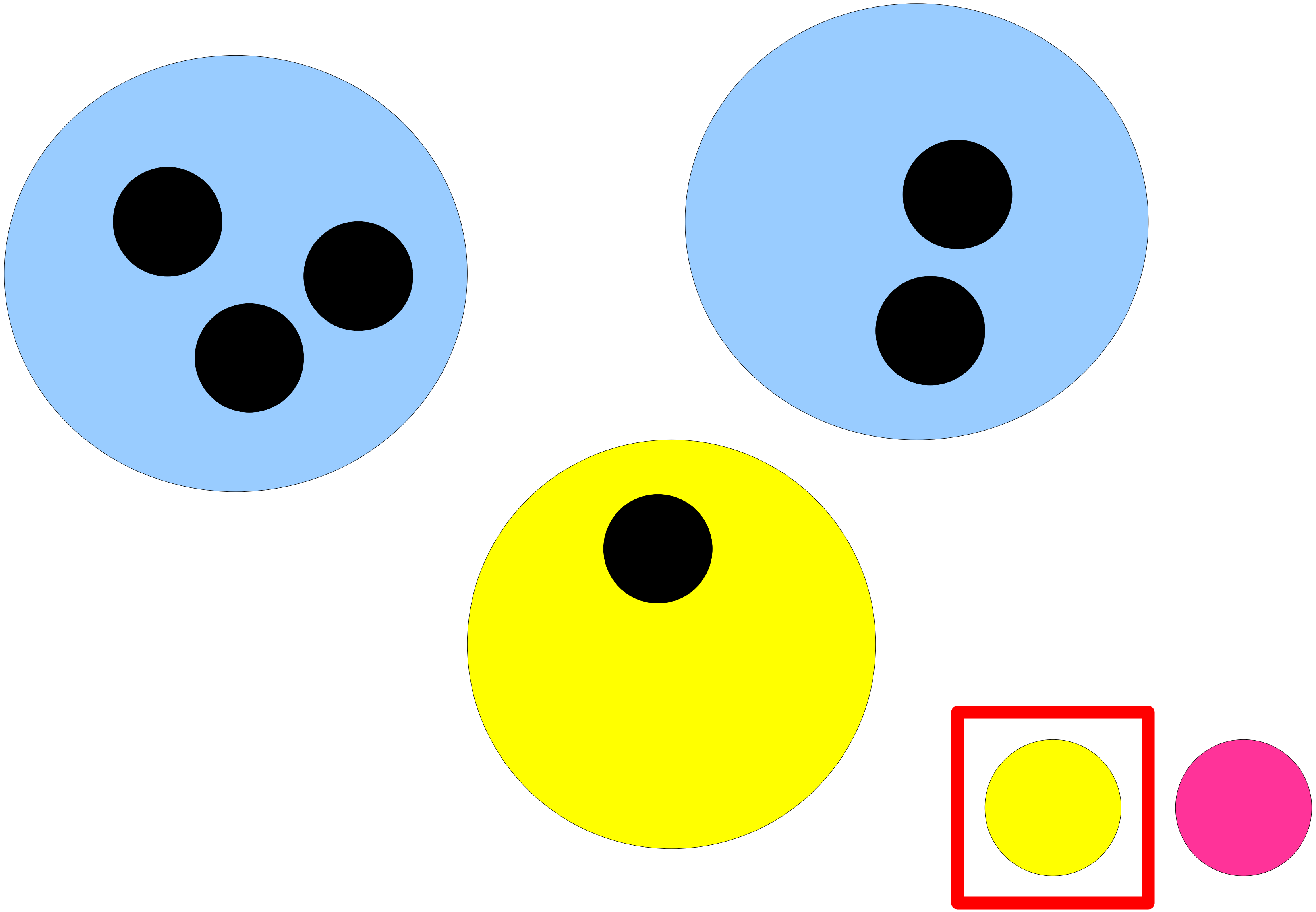
ニム（NIM）



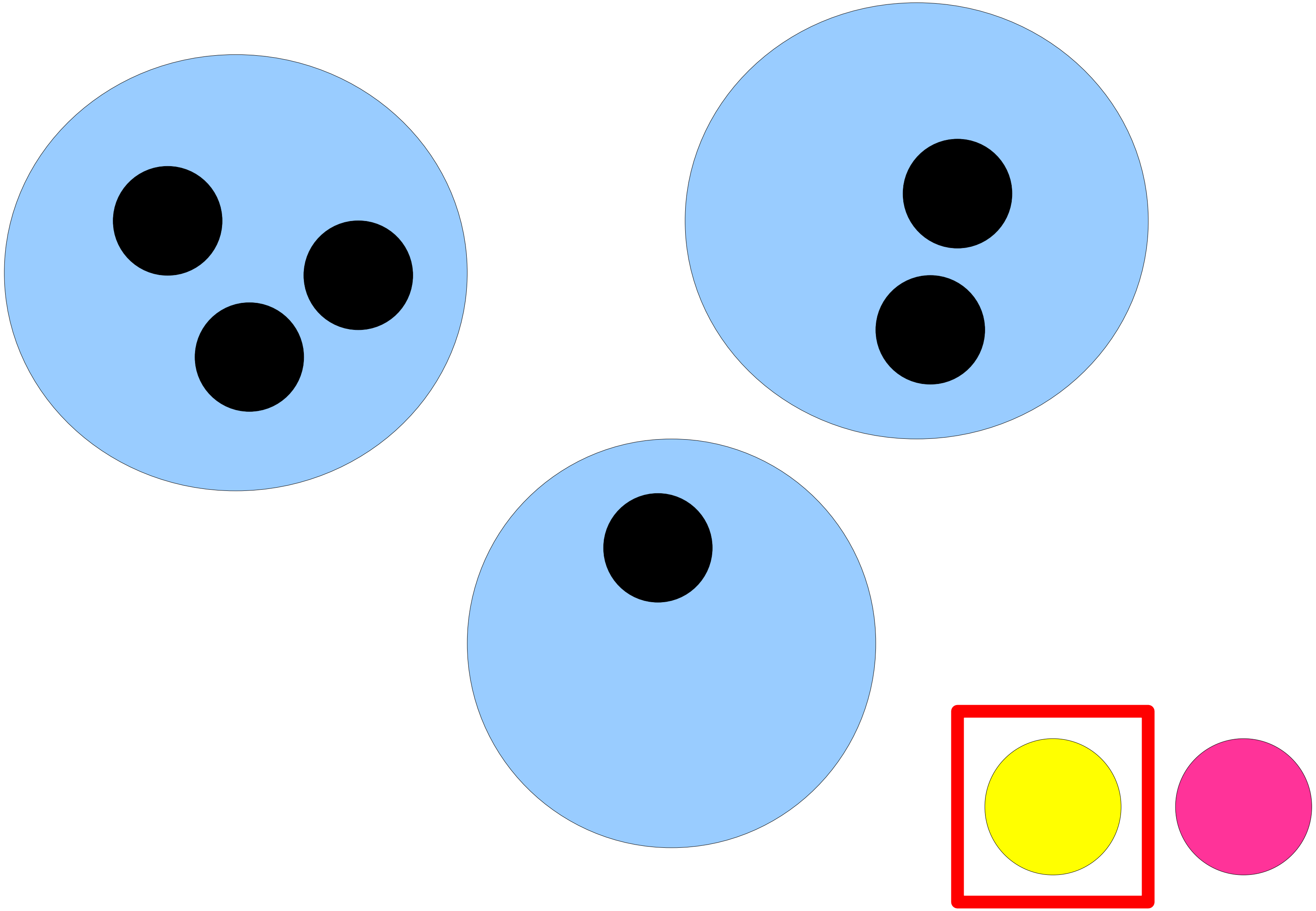
ニム（NIM）



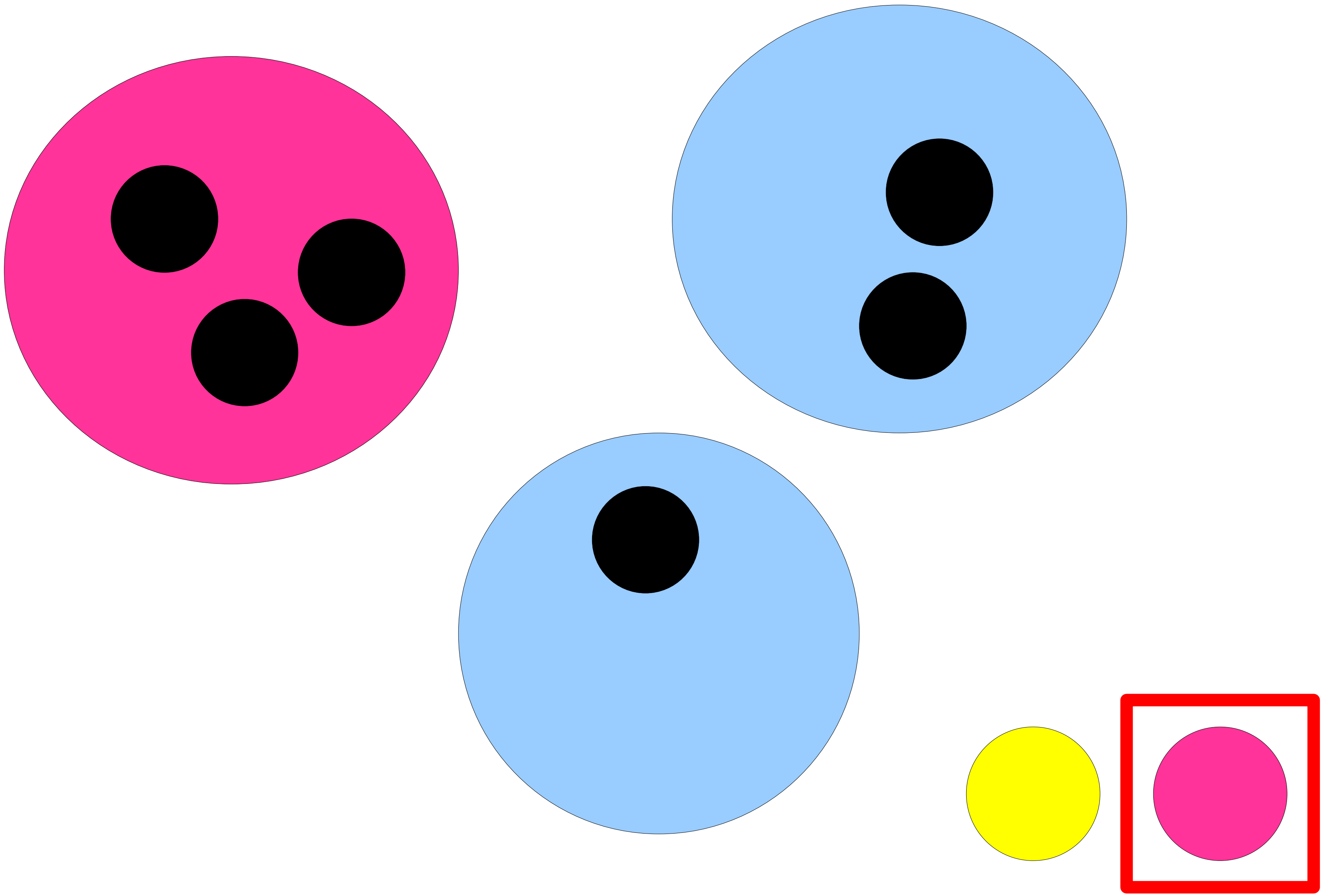
ニム（NIM）



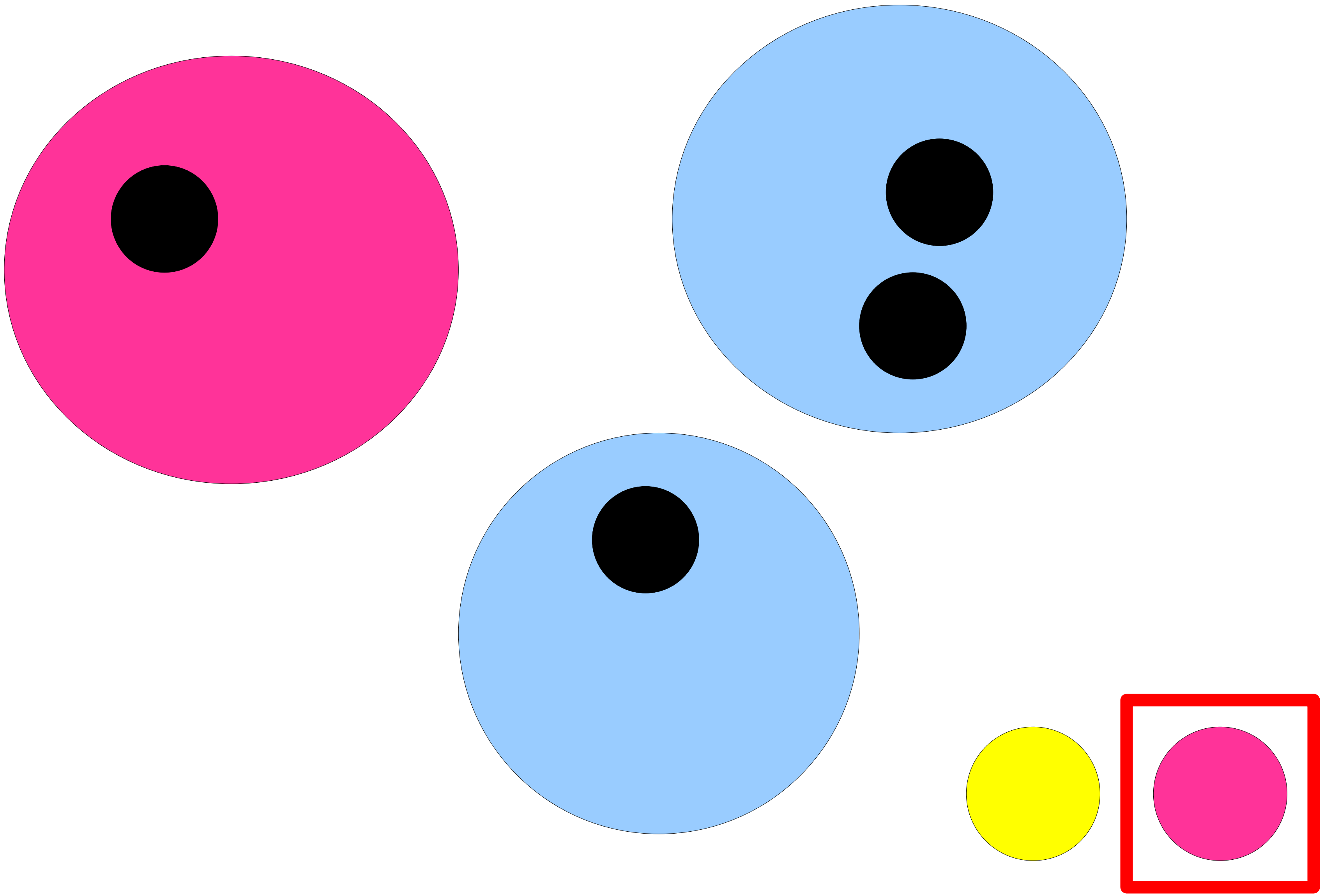
ニム（NIM）



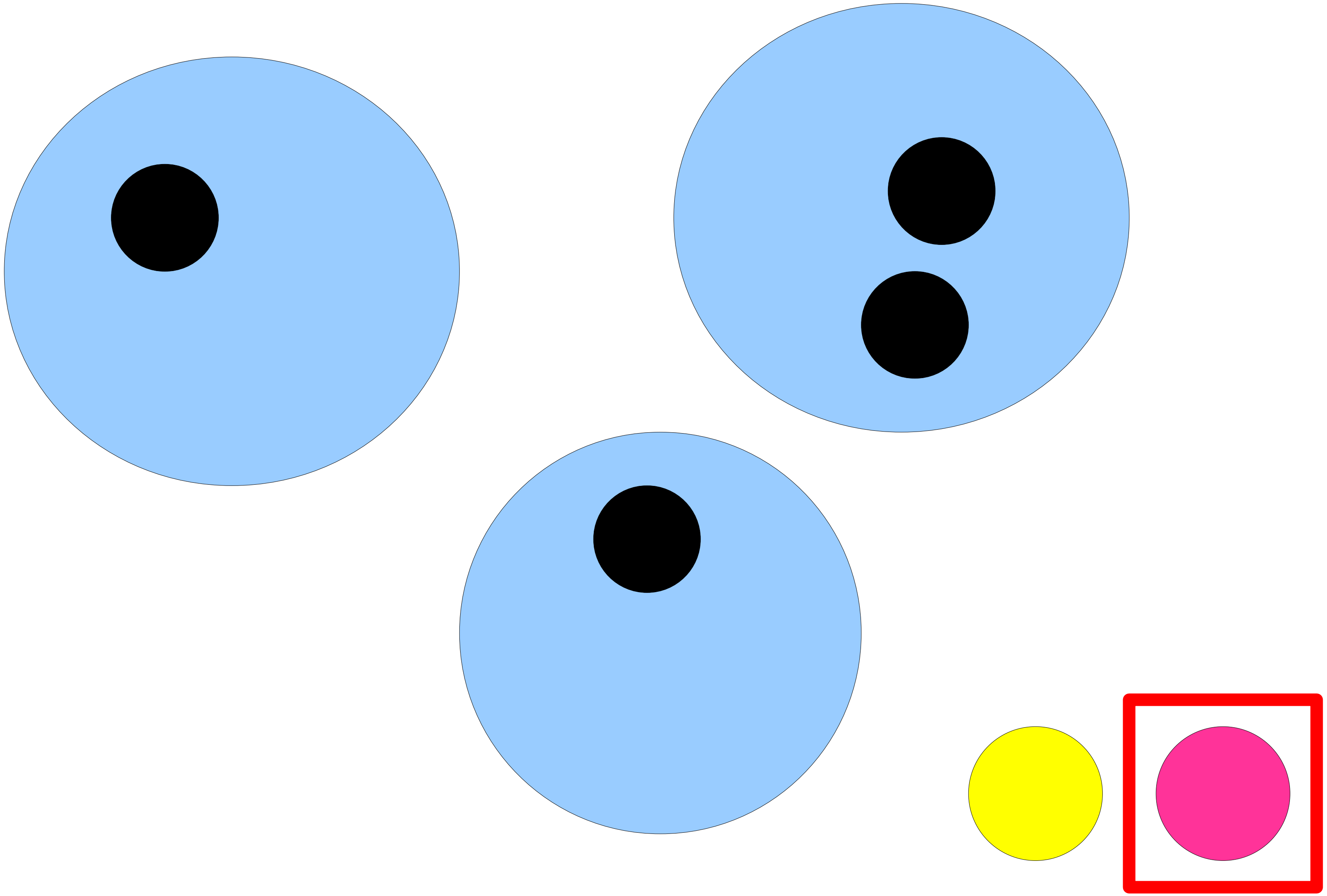
ニム（NIM）



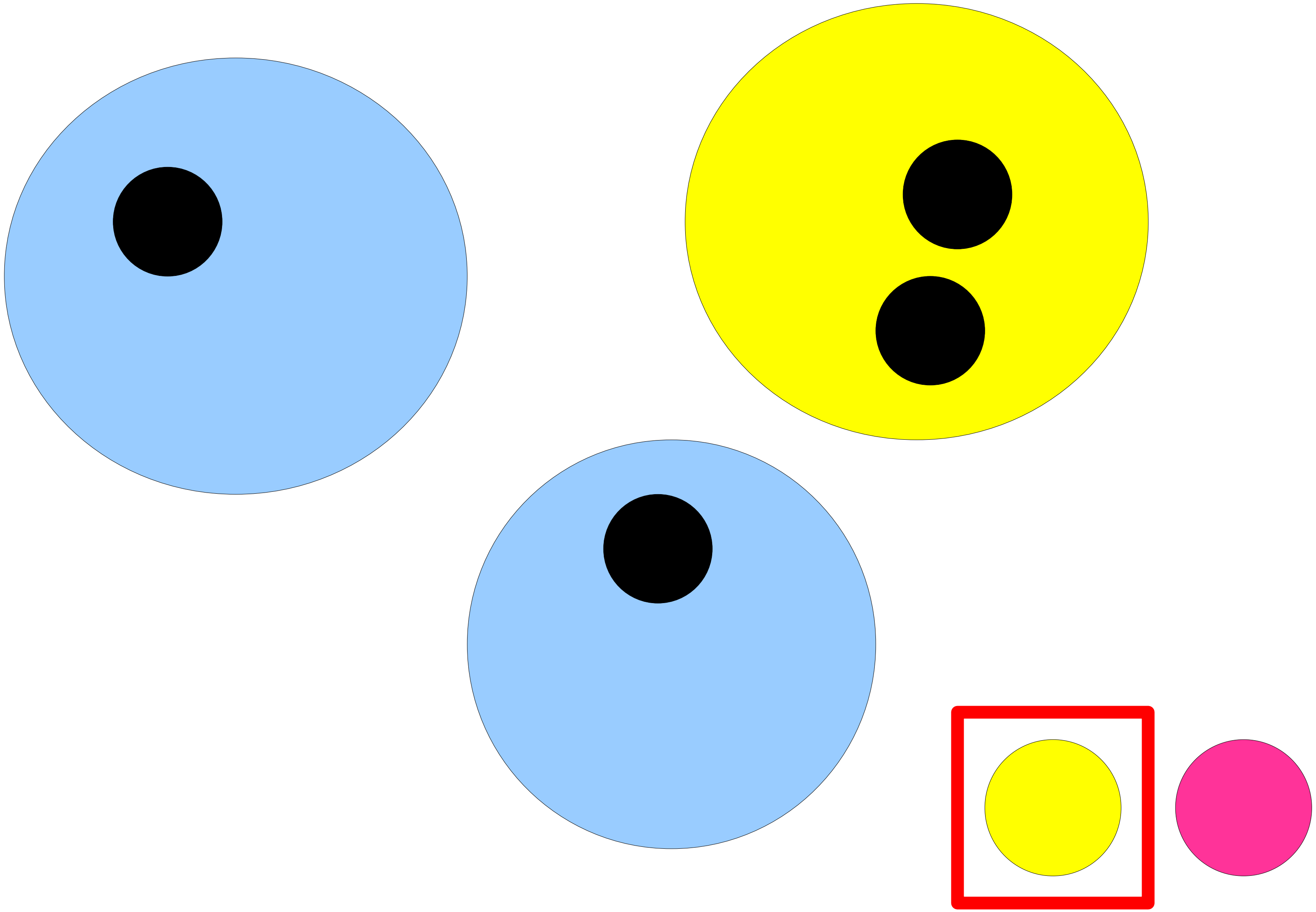
ニム（NIM）



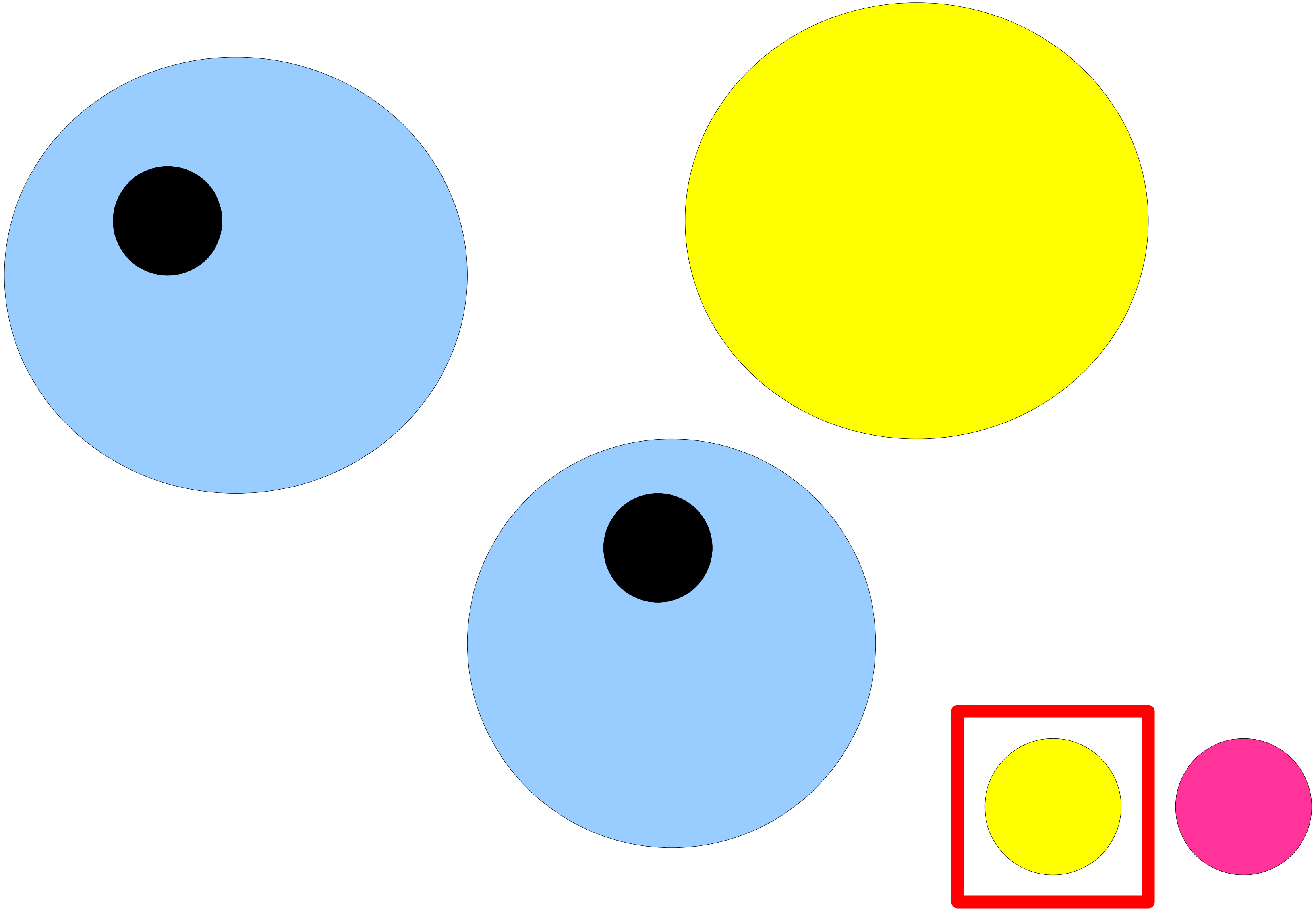
ニム（NIM）



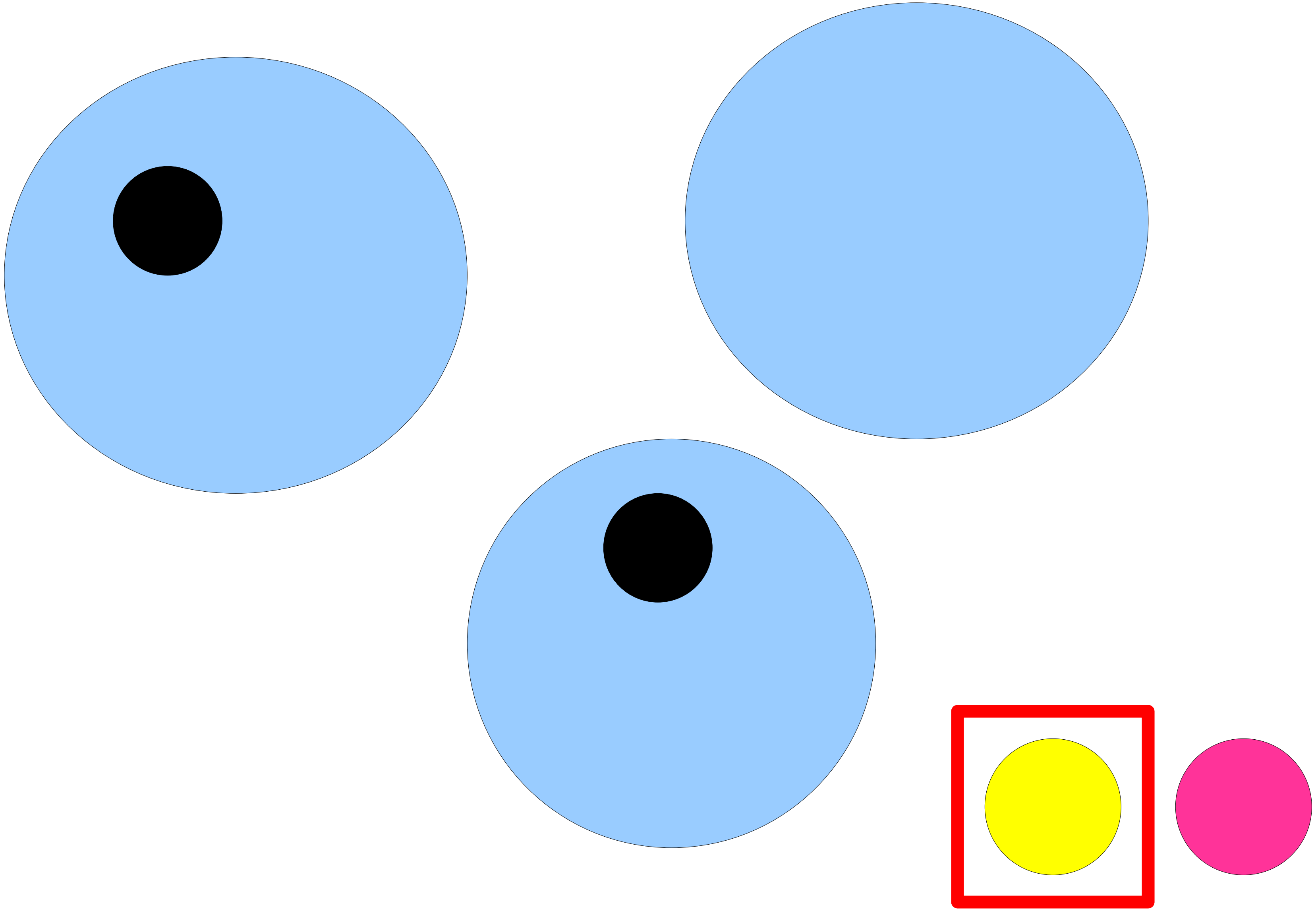
ニム（NIM）



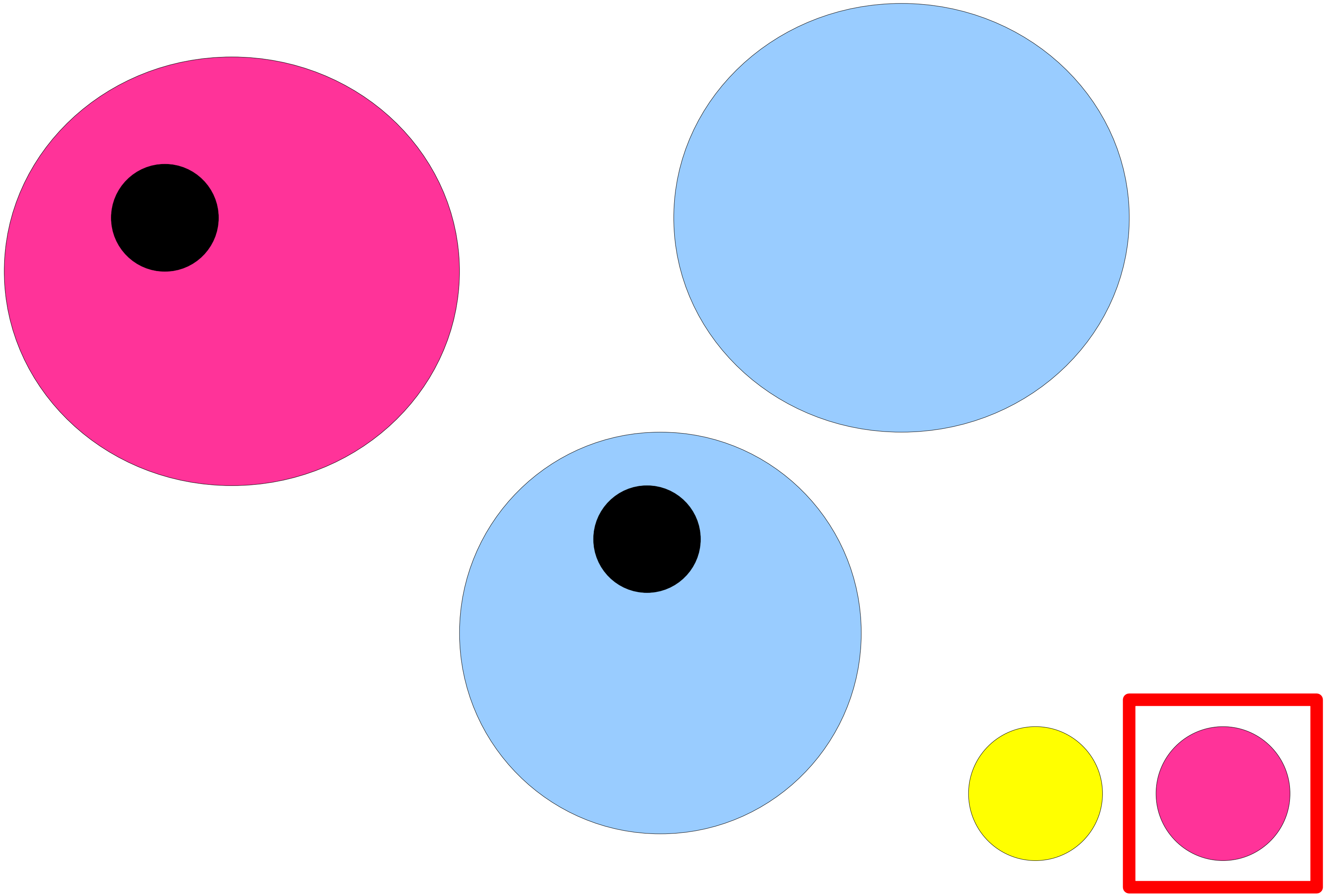
ニム（NIM）



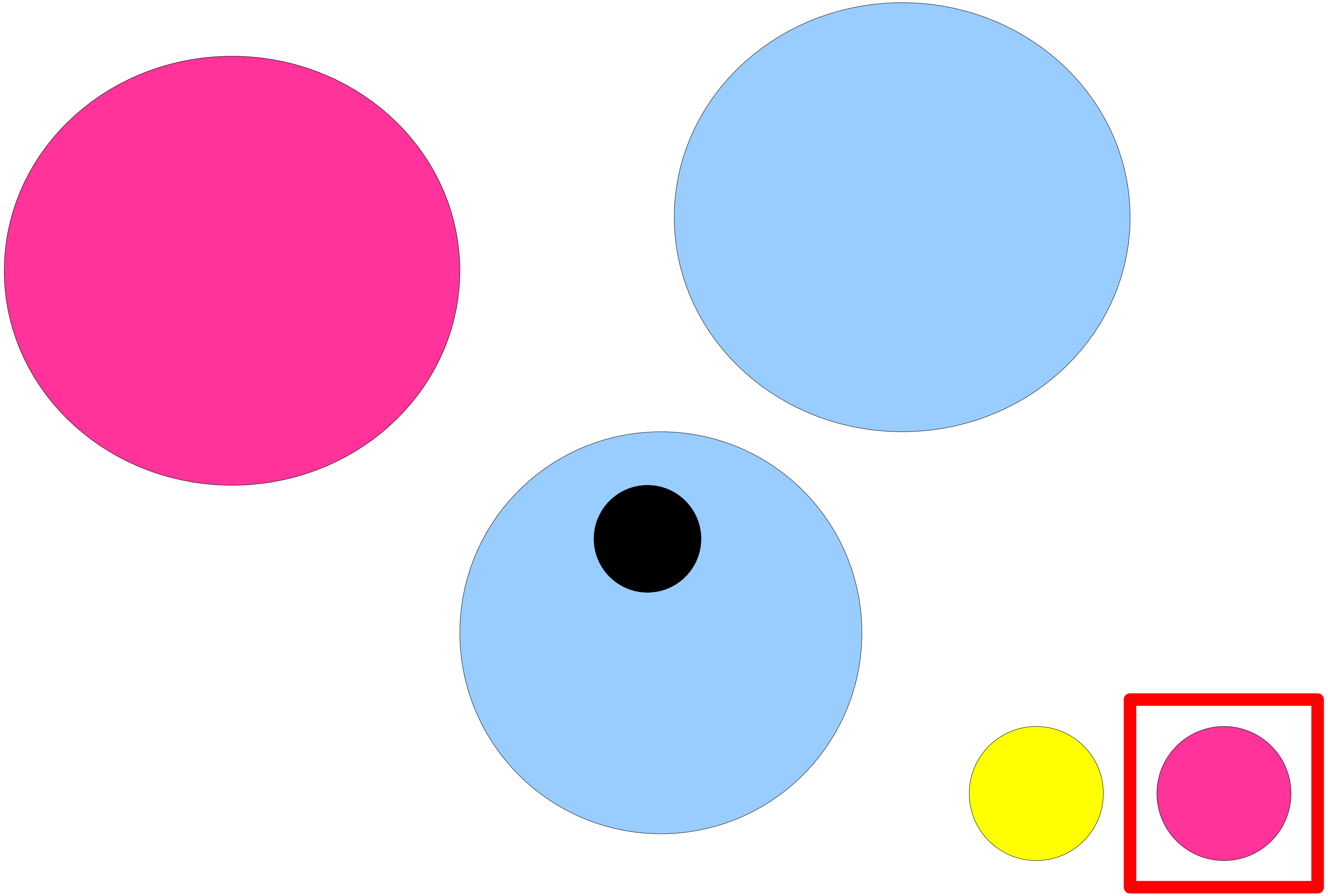
ニム（NIM）



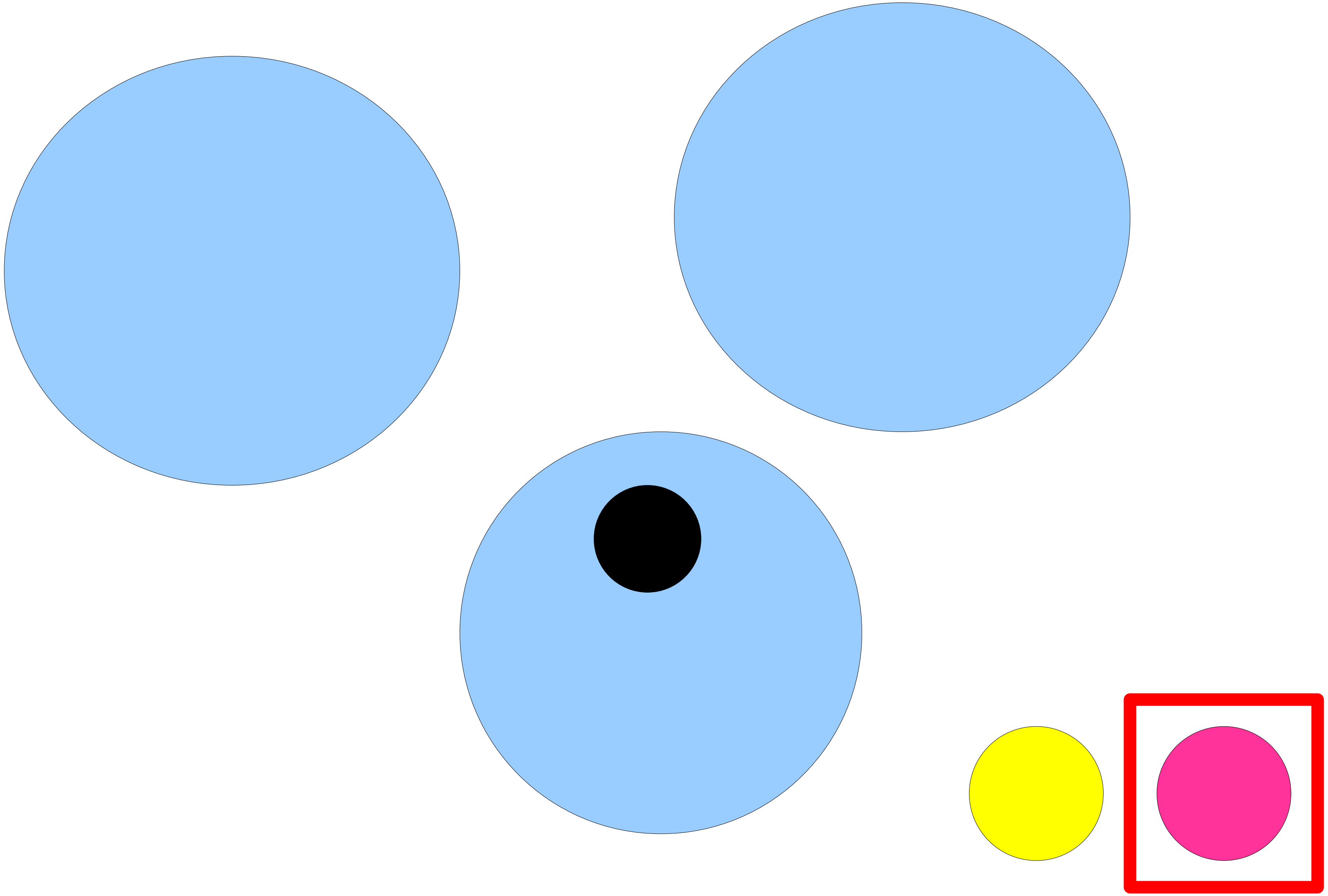
ニム（NIM）



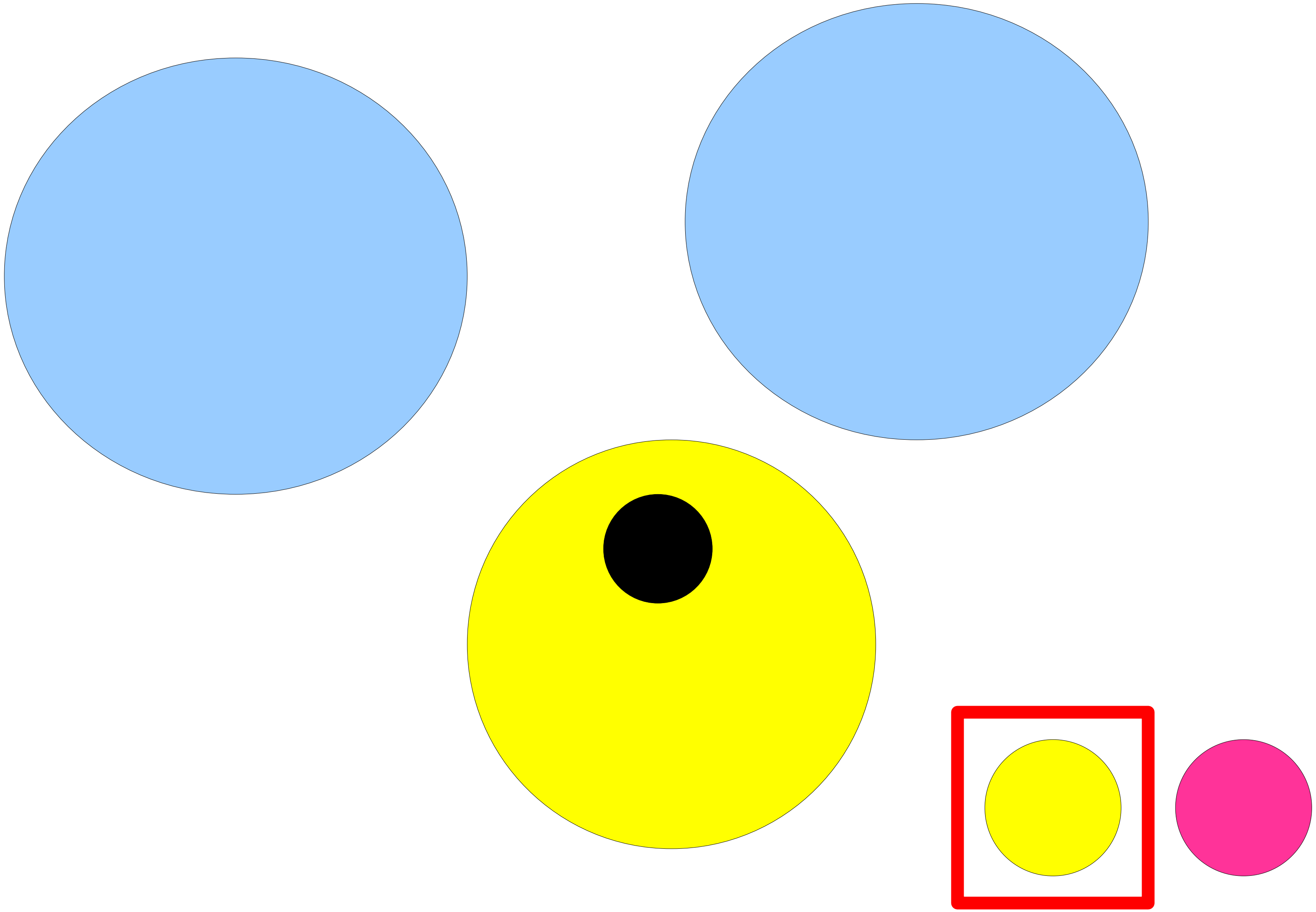
ニム（NIM）



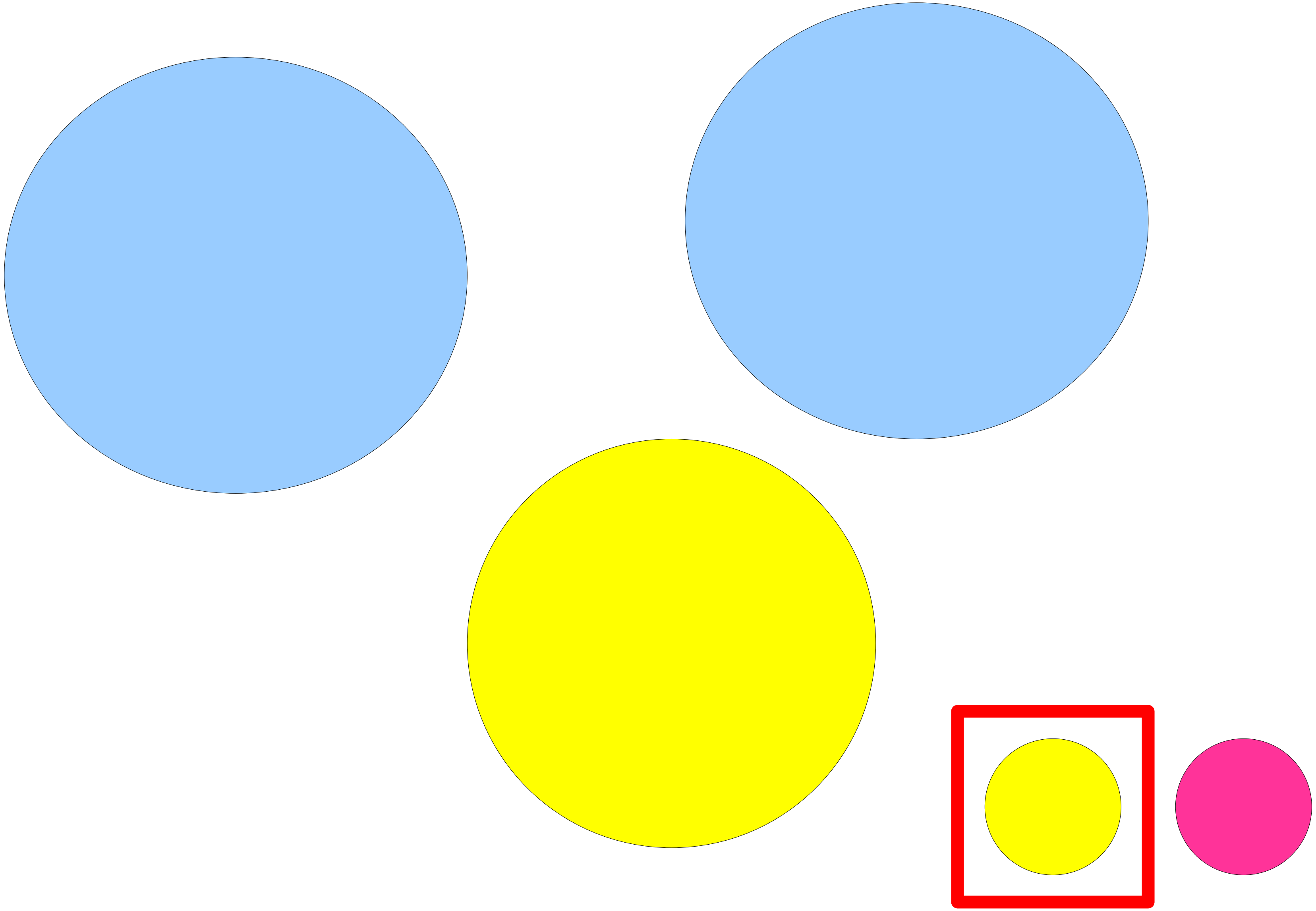
ニム（NIM）



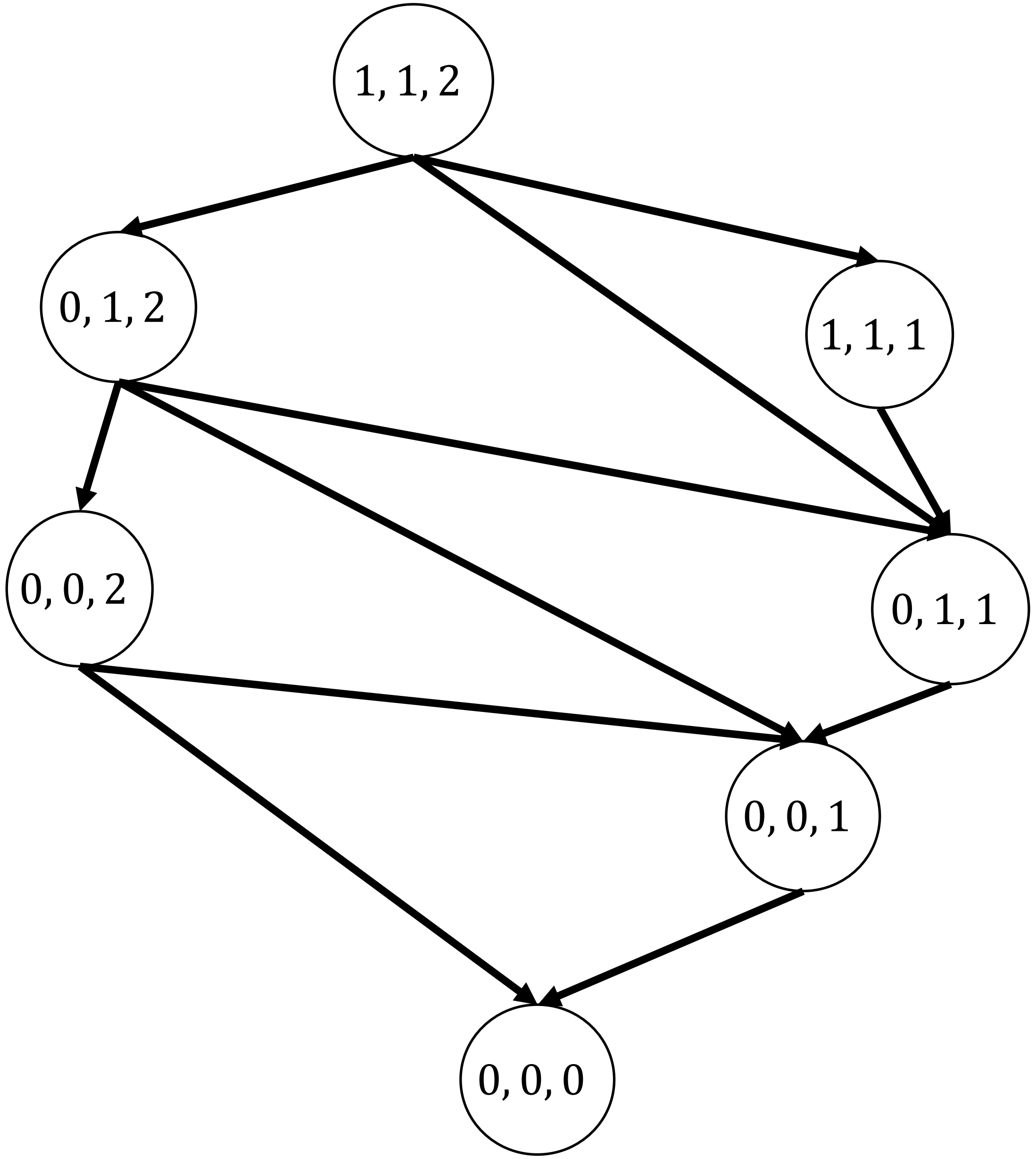
ニム（NIM）



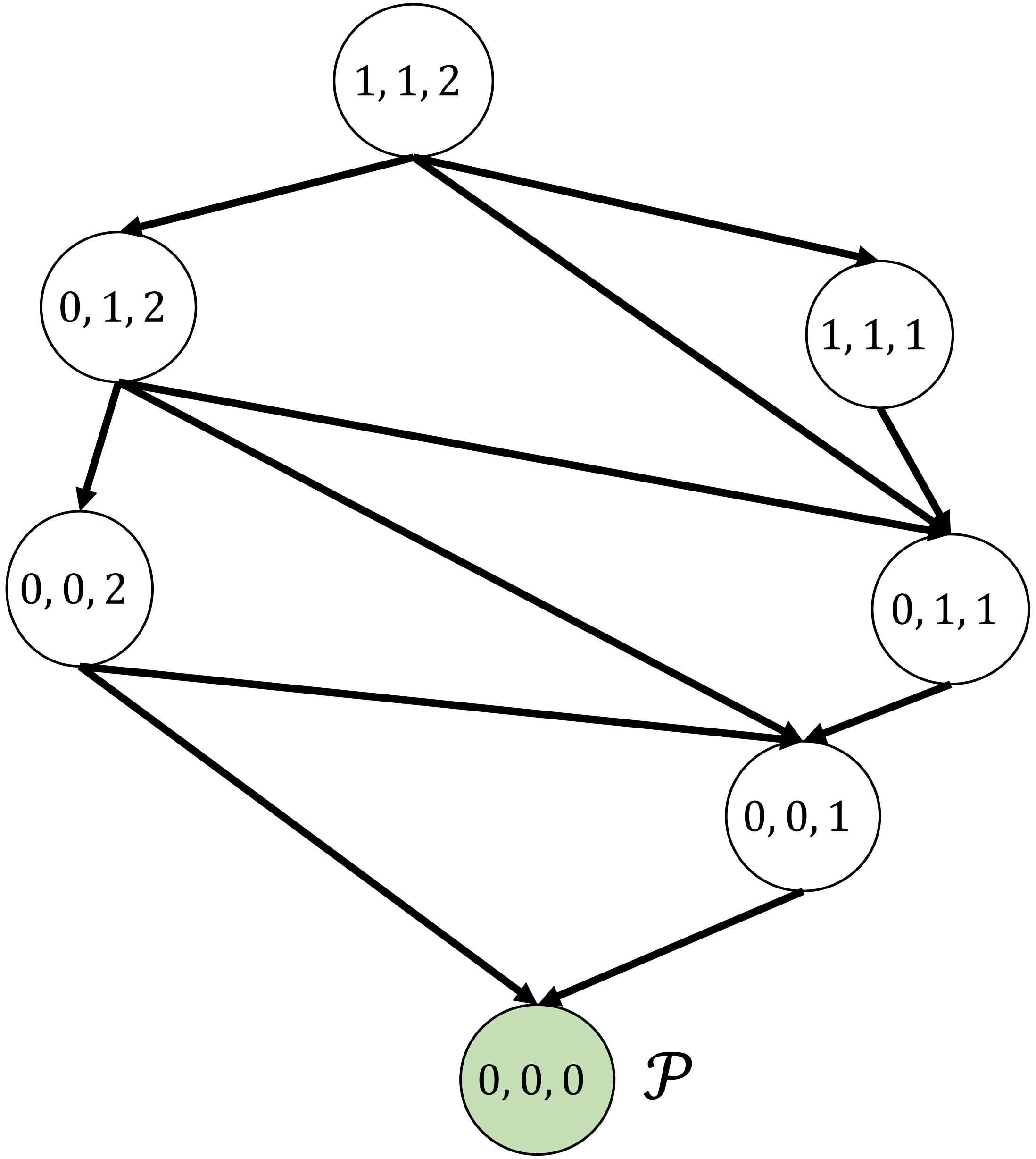
ニム（NIM）



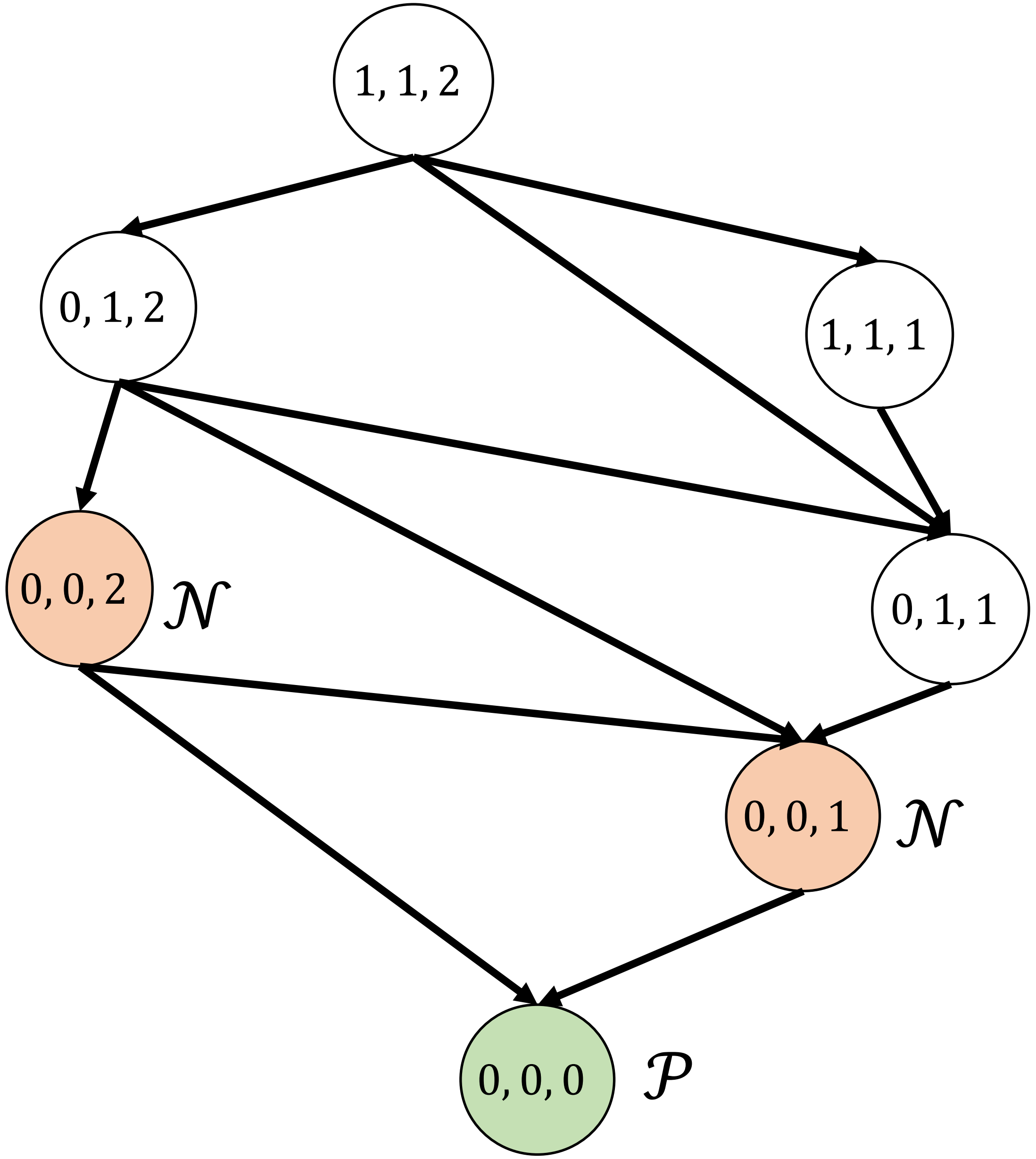
- 局面Gから一手で遷移可能な任意の局面 G'が$\mathcal{N}$ 局面ならば、Gは$\mathcal{P}$局面である。特に、Gが終了局面のときGは$\mathcal{P}$局面である。
- 局面Gから一手で遷移可能なある局面G'が$\mathcal{P}$局面ならば、Gは$\mathcal{N}$局面である。



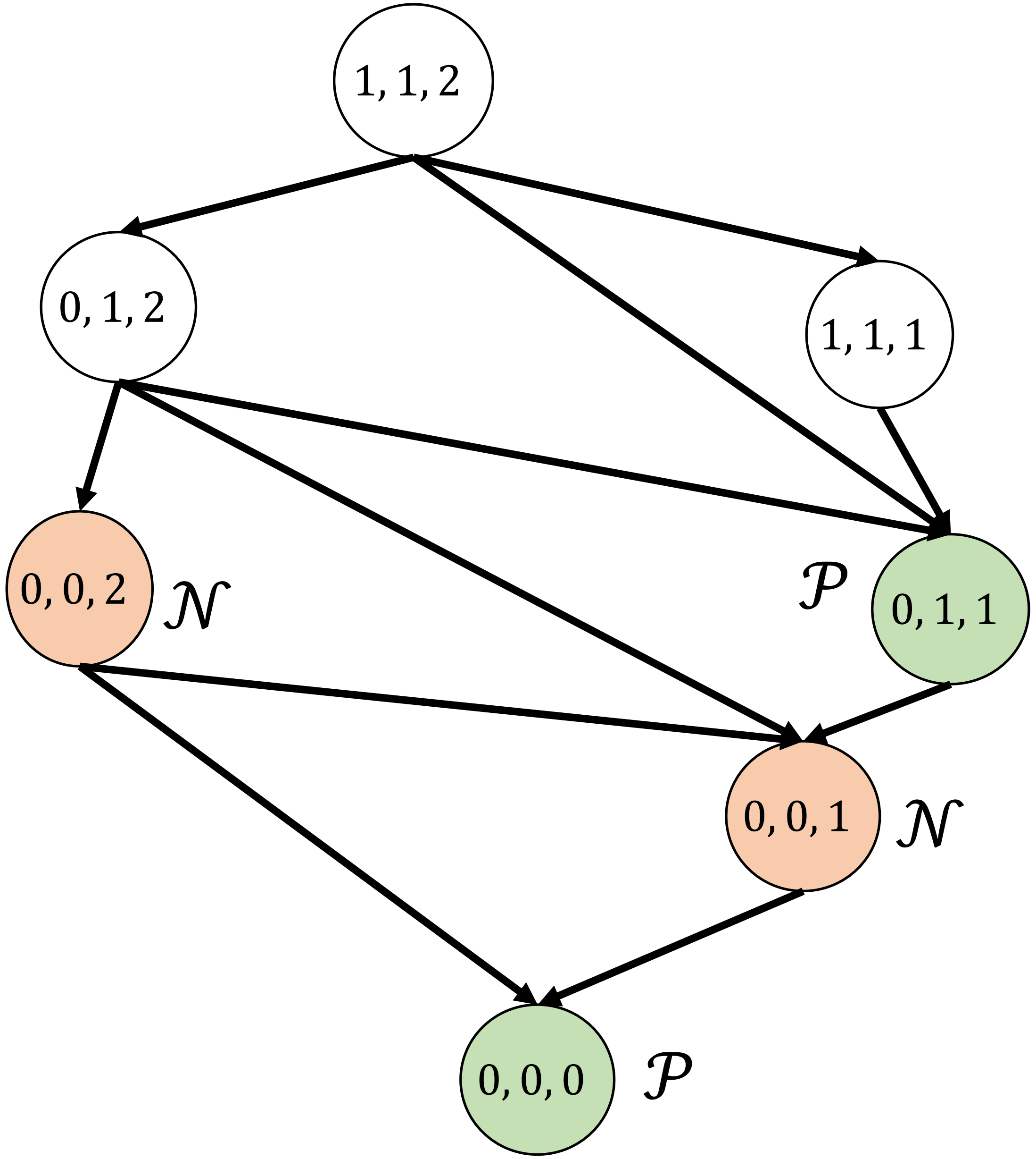
- **局面Gから一手で遷移可能な任意の局面G'が$\mathcal{N}$局面ならば、Gは$\mathcal{P}$局面である。特に、Gが終了局面のときGは$\mathcal{P}$局面である。**
- 局面Gから一手で遷移可能なある局面G'が$\mathcal{P}$局面ならば、Gは$\mathcal{N}$局面である。



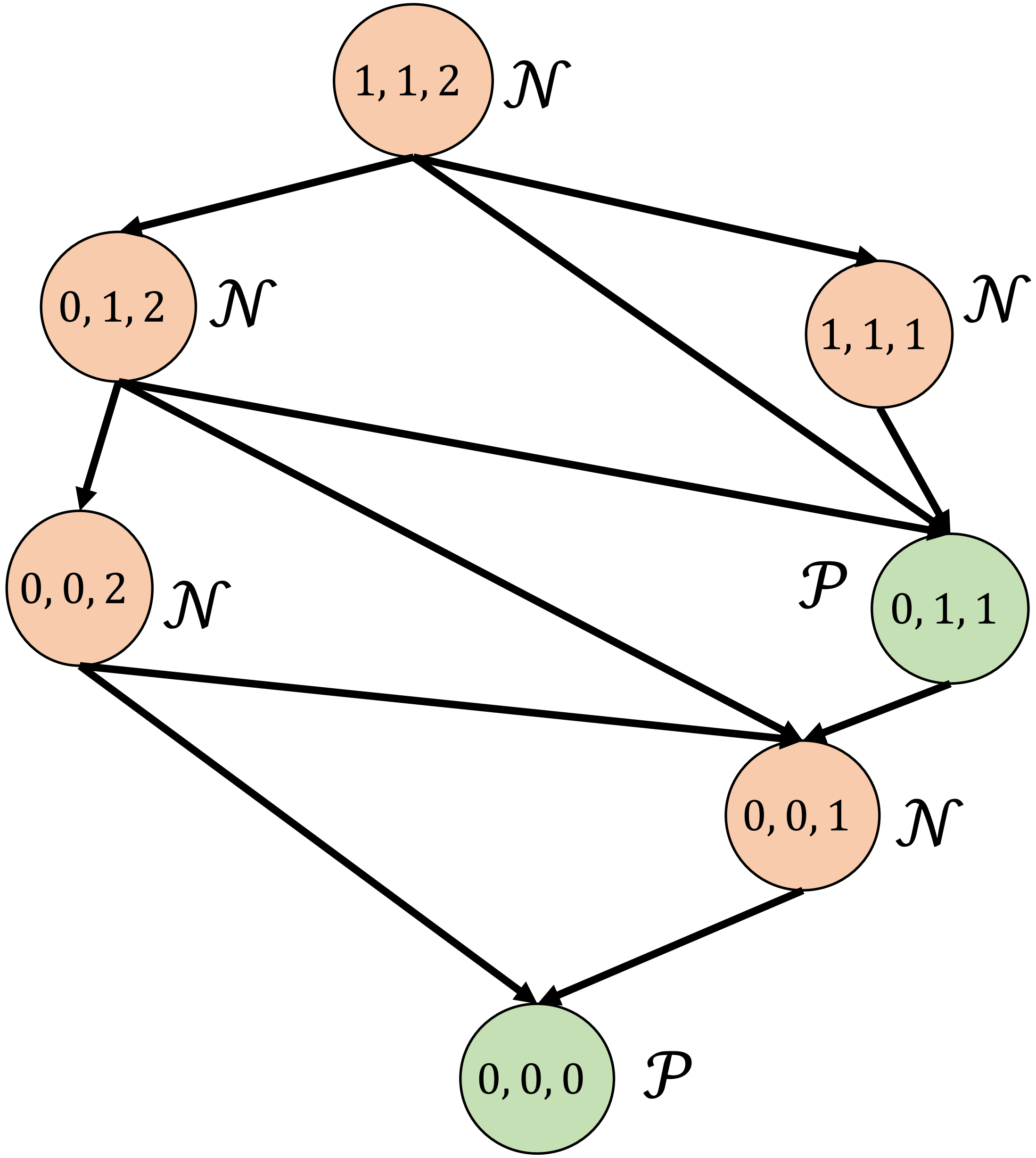
- 局面Gから一手で遷移可能な任意の局面G'が$\mathcal{N}$局面ならば、Gは$\mathcal{P}$局面である。特に、Gが終了局面のときGは$\mathcal{P}$局面である。
- **局面Gから一手で遷移可能なある局面G'が$\mathcal{P}$局面ならば、Gは$\mathcal{N}$局面である。**



- **局面Gから一手で遷移可能な任意の局面 G'が$\mathcal{N}$ 局面ならば、Gは$\mathcal{P}$局面である。特に、Gが終了局面のときGは$\mathcal{P}$局面である。**
- 局面Gから一手で遷移可能なある局面G'が$\mathcal{P}$局面ならば、Gは$\mathcal{N}$局面である。



- 局面Gから一手で遷移可能な任意の局面G'が$\mathcal{N}$局面ならば、Gは$\mathcal{P}$局面である。特に、Gが終了局面のときGは$\mathcal{P}$局面である。
- **局面Gから一手で遷移可能なある局面G'が$\mathcal{P}$局面ならば、Gは$\mathcal{N}$局面である。**



ニムの必勝判定(Bouton 1902)

- 排他的論理和(XOR)を$\oplus$とする(2進展開して、各桁を$\mathrm{mod}\ 2$で足す足し算)。

  例： $3 \oplus 6 = 11_2 \oplus 110_2 = 101_2 = 5$

- **定理：**

ニムの局面$(m_1, m_2, \ldots, m_n)$について、$m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n = 0$ならば$\mathcal{P}$局面（後手に必勝戦略がある）、そうでなければ$\mathcal{N}$局面（先手に必勝戦略がある）

例

- $(3, 5, 6) \to 3 \oplus 5 \oplus 6 = 0$なので$\mathcal{P}$局面
- $(1, 2, 3, 4) \to 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 = 4$なので$\mathcal{N}$局面
- $(6, 7, 8) \to 6 \oplus 7 \oplus 8 = 9$なので$\mathcal{N}$局面
- $(3, 4, 8, 15) \to 3 \oplus 4 \oplus 8 \oplus 15 = 0$なので$\mathcal{P}$局面

Sprague-Grundy数（グランディ数）

Sprague-Grundy数（グランディ数）

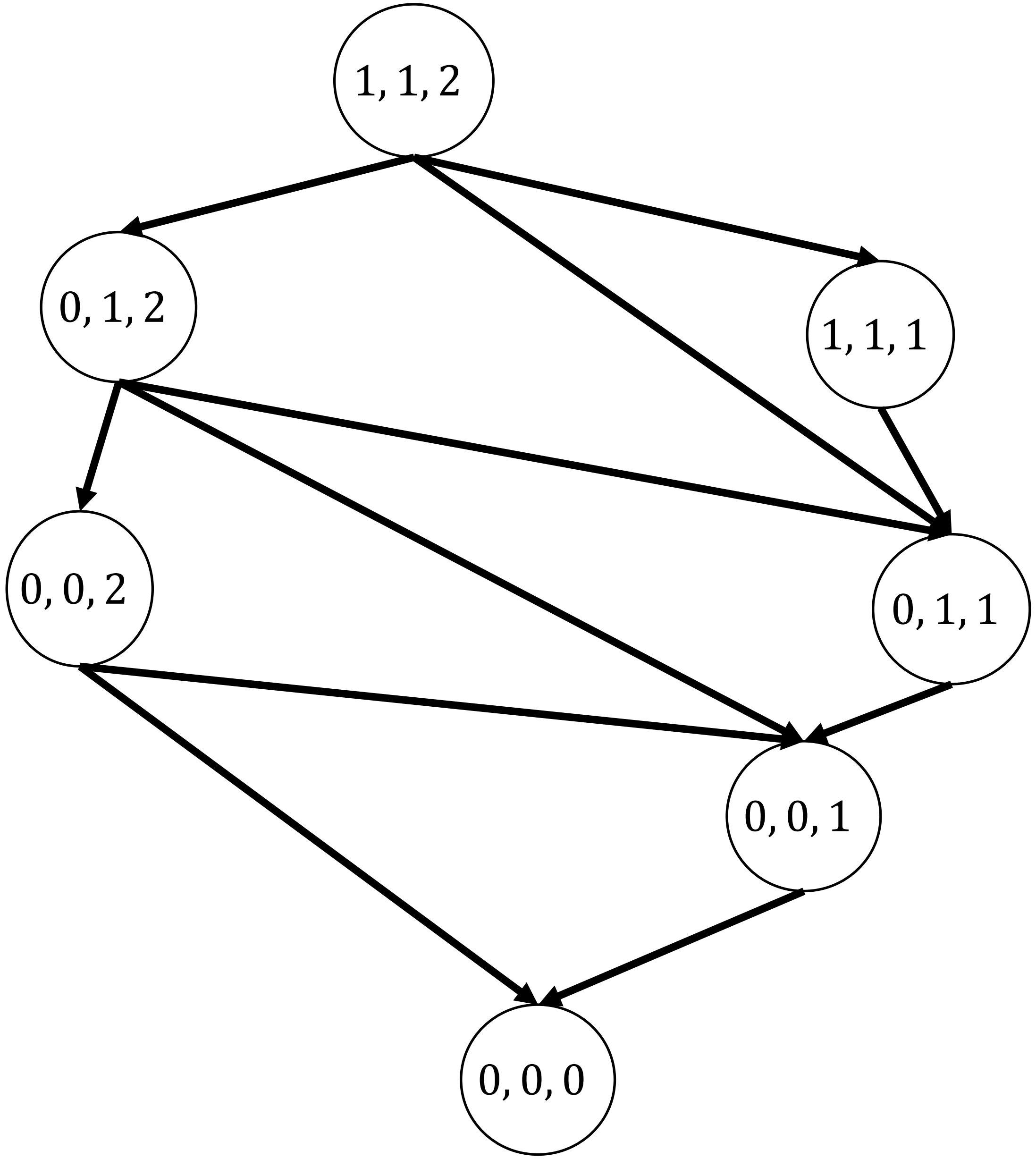
- Gから一手で遷移できる局面のことをGの選択肢という。G'がGの選択肢のとき、$G \to G'$とかく。

- 不偏ゲームの局面Gに対して、GのSprague-Grundy数（グランディ数） $\mathcal{G}(G)$は次のように定義される。

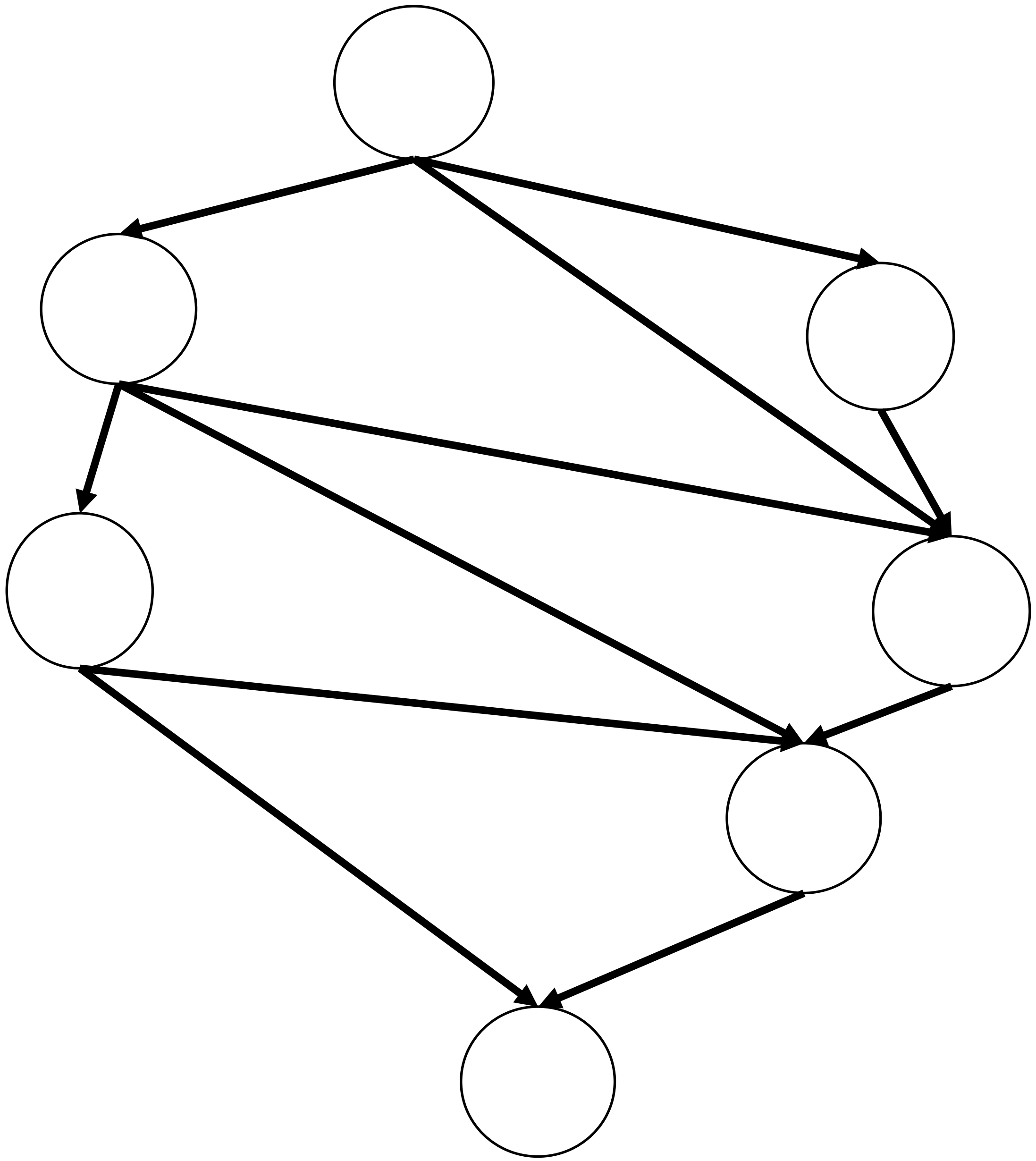
$$\mathcal{G}(G) = \mathrm{mex}(\{\mathcal{G}(G')|G \to G'\})$$

- ただし、$\mathrm{mex}(S)$は$\min(S \setminus \mathbb{N}_0)$、すなわち集合$S$に属さない最小の非負整数を表す。

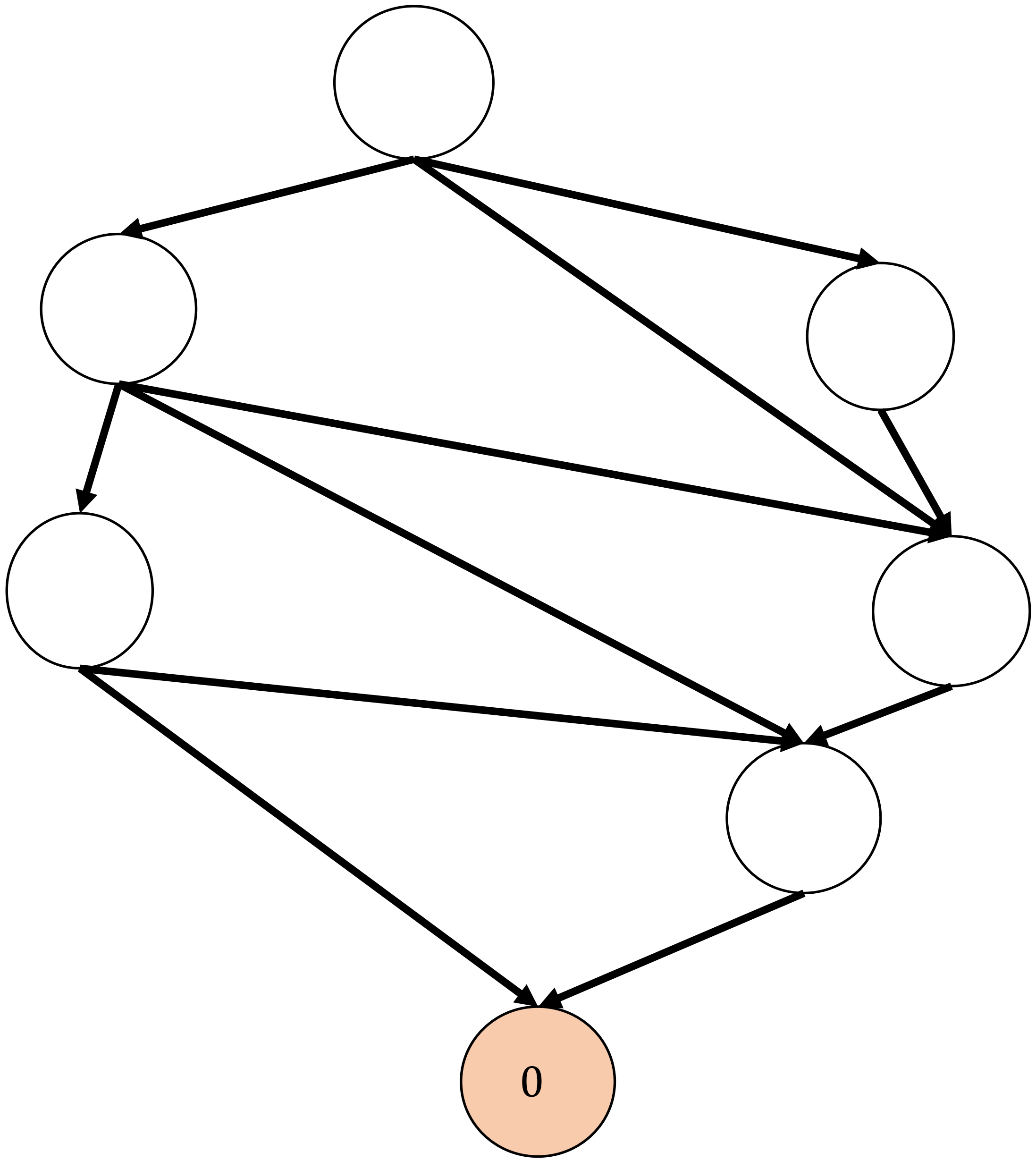
- $\mathcal{G}(G) = \mathrm{mex}(\{\mathcal{G}(G')|G \rightarrow G'\})$



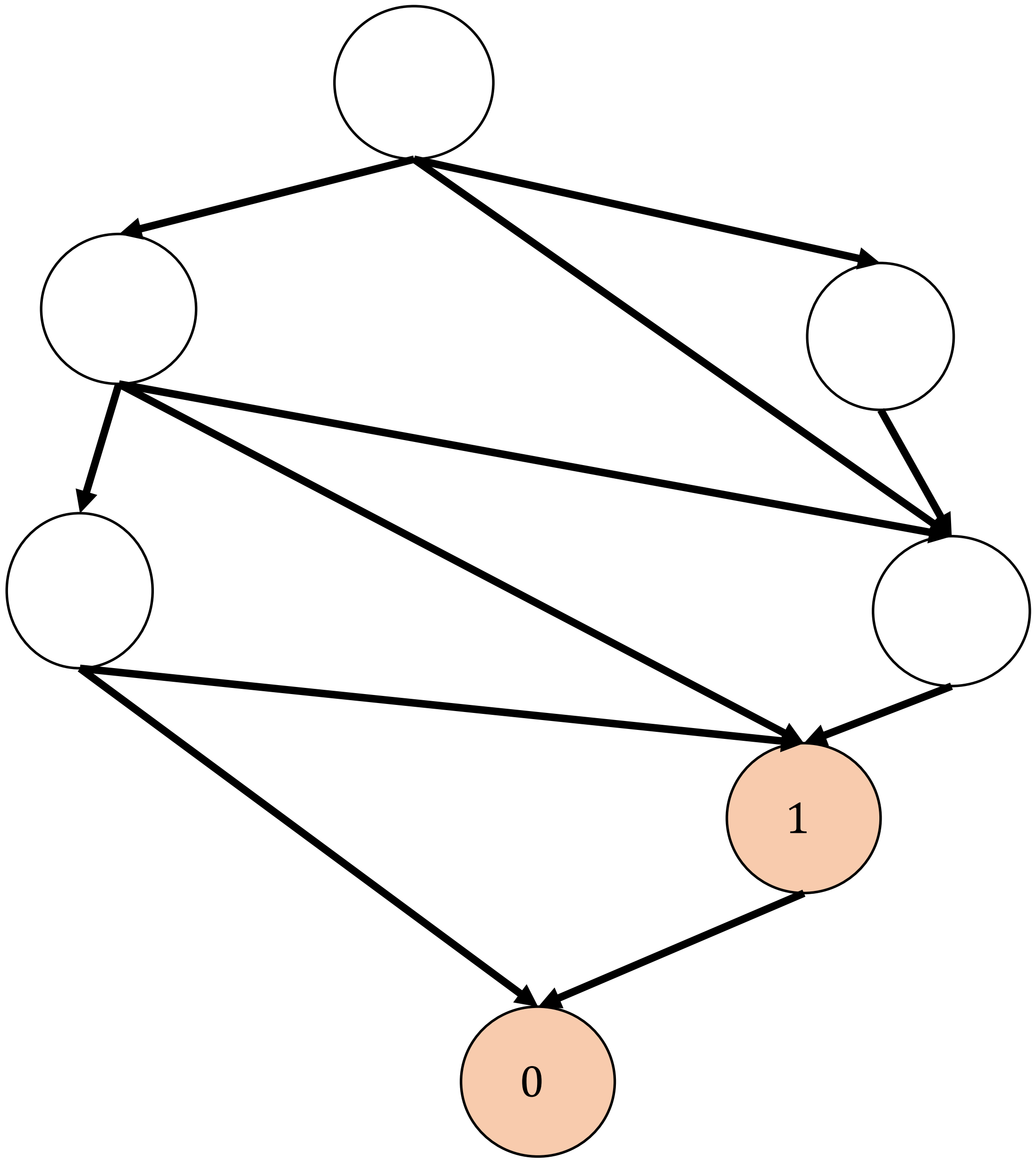
- $\mathcal{G}(G) = \text{mex}(\{\mathcal{G}(G') | G \to G'\})$



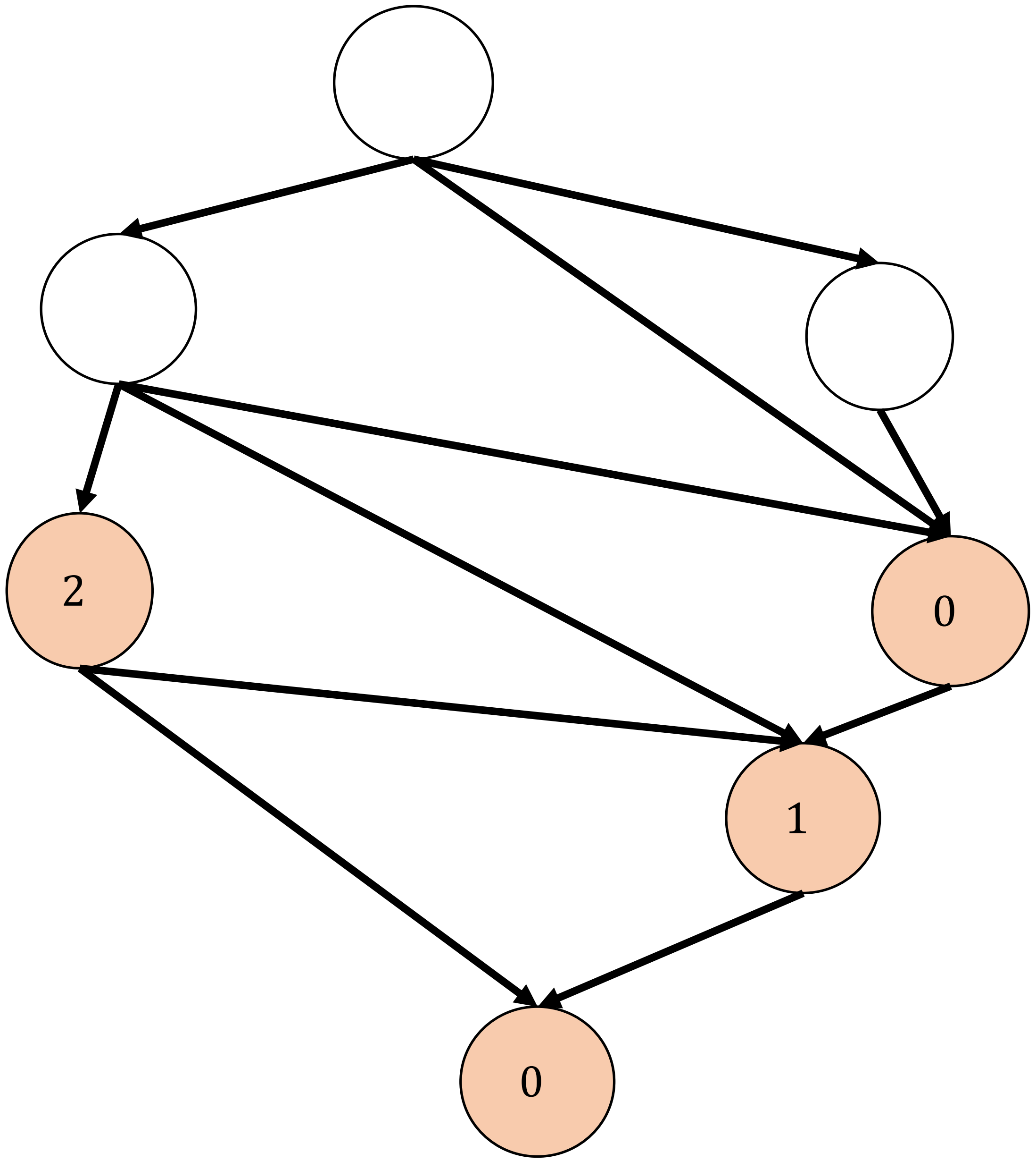
- $\mathcal{G}(G) = \mathrm{mex}(\{\mathcal{G}(G') | G \to G'\})$



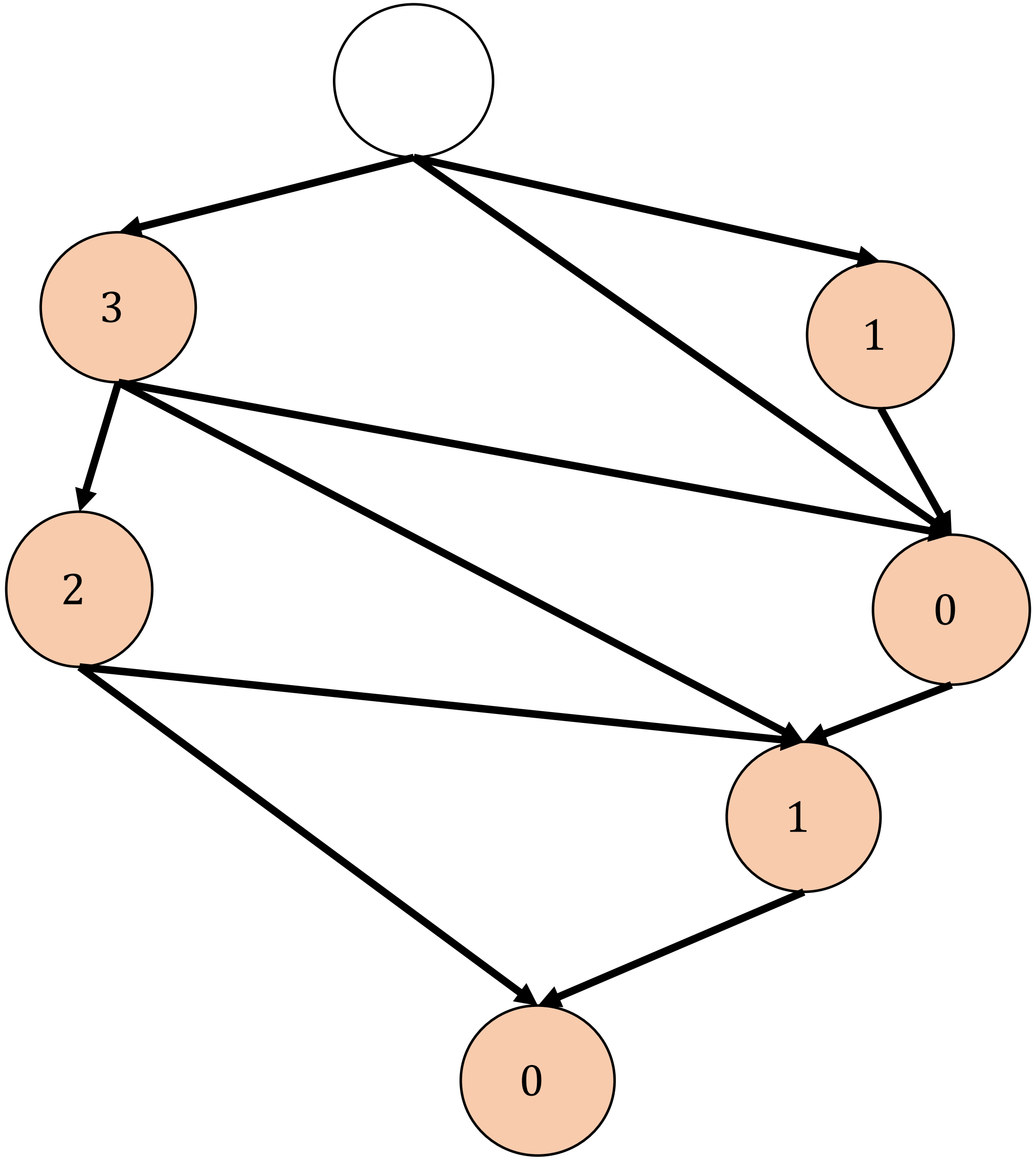
- $\mathcal{G}(G) = \text{mex}(\{\mathcal{G}(G') | G \to G'\})$



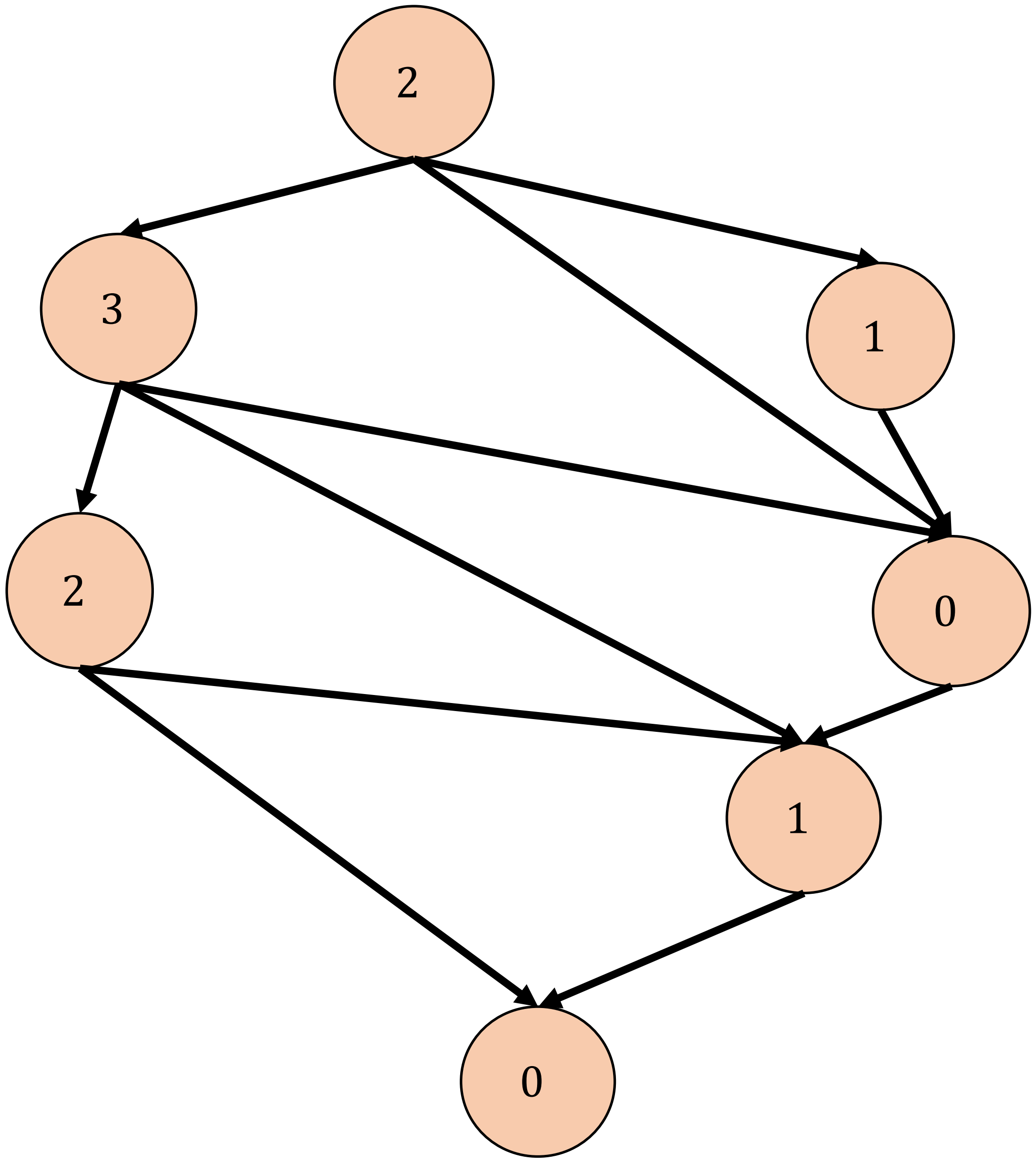
- $\mathcal{G}(G) = \text{mex}(\{\mathcal{G}(G') | G \to G'\})$



- $\mathcal{G}(G) = \operatorname{mex}(\{\mathcal{G}(G') | G \to G'\})$



- $\mathcal{G}(G) = \mathrm{mex}(\{\mathcal{G}(G')|G \to G'\})$



グランディ数

- グランディ数がなぜ大事なのか
  →局面の勝敗判定に使える。

- **定理（Sprague 1936, Grundy 1939）**
  $\mathcal{P}$局面である（後手に必勝戦略がある）$\Leftrightarrow$グランディ数が0である
  $\mathcal{N}$局面である（先手に必勝戦略がある）$\Leftrightarrow$グランディ数が0でない

グランディ数

- さらに、グランディ数は局面同士の**直和**を扱う際にも、重要な役割を果たす。
- 局面の直和：２つの局面AとBがあり、プレイヤーはAに着手するかBに着手するかのどちらかを選択する。このようなとき、全体の局面を$A+B$と表す。
- 次の定理が成り立つ。
- **定理（Sprague 1936, Grundy 1939）**

$$\mathcal{G}(A+B)=\mathcal{G}(A)\oplus\mathcal{G}(B)$$

ニムのグランディ数

- １山のニムのグランディ数を定義通りに計算してみる

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0																		

ニムのグランディ数

- １山のニムのグランディ数を定義通りに計算してみる

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1																	

ニムのグランディ数

- １山のニムのグランディ数を定義通りに計算してみる

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	2																

ニムのグランディ数

- １山のニムのグランディ数を定義通りに計算してみる

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…

ニムのグランディ数

- １山のニムのグランディ数を定義通りに計算してみる

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…

- n山のニムは、１山のニムの直和になっているので、Sprague-Grundyの理論を使うことができる。
- 全体のグランディ数は、上の結果より、各山の石の個数の排他的論理和。よって、Boutonの定理を包含しているとわかる。

復習：組合せゲーム理論の目標

- 局面全体の集合$\widetilde{\mathbb{X}}$
- 帰結類（必勝戦略保持者による分類）$\mathbb{O}$
- 局面から帰結類への写像$\boldsymbol{o}$
- 局面同士の**直和**演算子$+$

- 局面$G, H \in \widetilde{\mathbb{X}}$について、任意の$X \in \widetilde{\mathbb{X}}$に対して$\mathrm{o}(G+X) = o(H+X)$のとき$G =_{\widetilde{\mathbb{X}}} H$とする。

復習：組合せゲーム理論の目標

- 各局面$G \in \widetilde{\mathbb{X}}$について、同値類$[G]_{=_{\widetilde{\mathbb{X}}}}$がとれ、同値類の集合、すなわち$\widetilde{\mathbb{X}}$を$=_{\widetilde{\mathbb{X}}}$で割った商集合$\mathbb{X} = \widetilde{\mathbb{X}}/_{=_{\widetilde{\mathbb{X}}}}$が取れる。
- 演算＋は同値類同士の演算として定義することができるので、集合$\mathbb{X}$における演算＋の性質を見ることでもとの局面の解析に反映できる

不偏ゲームの場合

- 不偏ゲームの局面全体の集合$\widetilde{\mathbb{I}\mathbb{p}}$
- 帰結類（必勝戦略保持者による分類）$\mathbb{O} = \{\mathcal{N}, \mathcal{P}\}$
- 局面から帰結類への写像o
- 局面同士の直和演算子$+$

- 局面$G, H \in \widetilde{\mathbb{I}\mathbb{P}}$について、任意の$X \in \widetilde{\mathbb{I}\mathbb{p}}$に対して$\mathrm{o}(G + X) = o(H + X)$のとき$G =_{\widetilde{\mathbb{I}\mathbb{p}}} H$とする。

復習：組合せゲーム理論の目標

- 各局面$G \in \widetilde{\mathbb{Ip}}$について、同値類$[G]_{=_{\widetilde{\mathbb{Ip}}}}$がとれ、同値類の集合、すなわち$\widetilde{\mathbb{Ip}}$を$=_{\widetilde{\mathbb{Ip}}}$で割った商集合$\mathbb{Ip} = \widetilde{\mathbb{Ip}}/_{=_{\widetilde{\mathbb{Ip}}}}$が取れる。
- ここで、 $[G]_{=_{\widetilde{\mathbb{Ip}}}}$は、 Gとグランディ数が等しい局面全体の集合になるので、 $\mathbb{Ip}$は非負整数の集合$\mathbb{N}_0$と同型になり、局面同士の演算＋は非負整数の演算$\oplus$に対応する。

第１部
正規形不偏ゲームについて

後編：さまざまな不偏ゲームの性質

制限ニム

- 最初に正整数の集合Sが与えられて、プレイヤーは自分の手番である$s \in S$を選び、石をs個山から取る。

- １山で考えたとき、石の個数に応じてグランディ数が一意に定まるので、**グランディ数列**を考えることができる。

（複数山についてはSprague-Grundyの理論が使えるので１山についての解析さえできればよい）

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S = \{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0																		

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S = \{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1																	

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S = \{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	⋯
グランディ数	0	1	0																

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S = \{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	0	1															

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S = \{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	0	1	2														

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S = \{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	0	1	2	3													

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S = \{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	…

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S=\{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	**0**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**2**	**3**	0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	…

Sが有限集合であるパターン

- **定理**：グランディ数列は周期を持つ。
- 例：$S=\{1,4,5\}$　つまり、１個、４個、または５個石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	**0**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**2**	**3**	0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	…

- 最初にいくつかの例外があり、途中から周期的になる場合もあるが、いずれにせよ最終的には周期的になる。ちなみにこの例のように最初から周期的な場合、純周期的になるという。
- **未解決問題**：Sとグランディ数列の関係は？

Sが無限集合であるパターン

- ある有限集合Tに対し、$S = \mathbb{N}^+ \setminus T$ とした制限ニムは、All-butニムと呼ばれる。
- **定理（Siegel 2005）**：

All-butニムのグランディ数列は加法周期を持つ

- 例：$S = \mathbb{N}^+ \setminus \{2,3\}$　つまり、２個、または３個でなければ、好きに石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	0	1	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	…

Sが無限集合であるパターン

- ある有限集合Tに対し、$S = \mathbb{N}^+ \setminus T$ とした制限ニムは、All-butニムと呼ばれる。
- **定理（Siegel 2005）**：

All-butニムのグランディ数列は加法周期を持つ

- 例：$S = \mathbb{N}^+ \setminus \{2,3\}$　つまり、２個、または３個でなければ、好きに石を取ってよい

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	**0**	**1**	**0**	**1**	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	…

8進ゲーム（分割を許すニム）

- 山の２分割を許すゲーム（２つの山は等しくなくてもよい）
- ルールを記述する際に０～７の数を用いてコードネームを与えることから８進ゲームと呼ばれる
- 例：ケイレス（コードネーム0.77）
  - 山から１つまたは２つ石を取る。その後、山を分割してもよい。

- 石を取る個数が有限個の８進ゲームは、グランディ数列が、ある一定の長さの区間で周期的な振る舞いをすれば、その後も周期的になることが知られている。
- ただし、どの８進ゲームも最終的に周期を持つかは**未解決**

MaxニムとMinニム

- Maxニム：最初に関数fが与えられる。山にある石の個数をmとしたとき、プレイヤーは自分の手番である正整数$m' \leq f(m)$を選び、石をm'個山から取る。
- 例：$f(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$のとき、つまり、山の石の個数の半分未満、石を取ってよいとき

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	0	0	1	0	2	1	3	0	4	2	5	1	6	3	7	0	8	…

MaxニムとMinニム

- Maxニム：最初に関数fが与えられる。山にある石の個数をmとしたとき、プレイヤーは自分の手番である正整数$m' \leq f(m)$を選び、石をm'個山から取る。
- 例：$f(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$のとき、つまり、山の石の個数の半分未満、石を取ってよいとき

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	**0**	0	**0**	1	**0**	2	**1**	3	**0**	4	**2**	5	**1**	6	**3**	7	**0**	8	…

- **定理(Levine 2006)**：Maxニムのグランディ数は自己再帰的である

MaxニムとMinニム

- Minニム：最初に関数fが与えられる。山にある石の個数をmとしたとき、プレイヤーは自分の手番である正整数$m' > f(m)$を選び、石をm'個山から取る。
- 例：$f(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$のとき、つまり、山の石の個数の半分以上石を取らないといけないとき。

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
グランディ数	0	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	…

MaxニムとMinニム

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
Maxニム	0	0	0	1	0	2	1	3	0	4	2	5	1	6	3	7	0	8	…
Minニム	0	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	…

MaxニムとMinニム

- **定理（Levine 2006）：**
  - 関数fが$f(x)=f(x-1)$または$f(x)=f(x-1)+1$を満たすとき、fによって定められるMaxニムのグランディ数列$\{\mathcal{G}(m)\}$とfによって定められるMinニムのグランディ数列$\{\mathcal{H}(m)\}$は次の関係を持つ。
  - $\mathcal{H}(m)=\#\{0<k\leq m \mid \mathcal{G}(k)=0\}$、すなわち

$\mathcal{H}(0)=0$および$m>0$について

$$\mathcal{H}(m)=\begin{cases}\mathcal{H}(m-1)\ (\mathcal{G}(m)\neq 0\text{のとき})\\ 1+\mathcal{H}(m-1)(\mathcal{G}(m)=0\text{のとき})\end{cases}$$

である。

石の個数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
Maxニム	**0**	**0**	**0**	1	**0**	2	1	3	**0**	4	2	5	1	6	3	7	**0**	8	…
Minニム	**0**	**1**	**2**	2	**3**	3	3	3	**4**	4	4	4	4	4	4	4	**5**	5	…

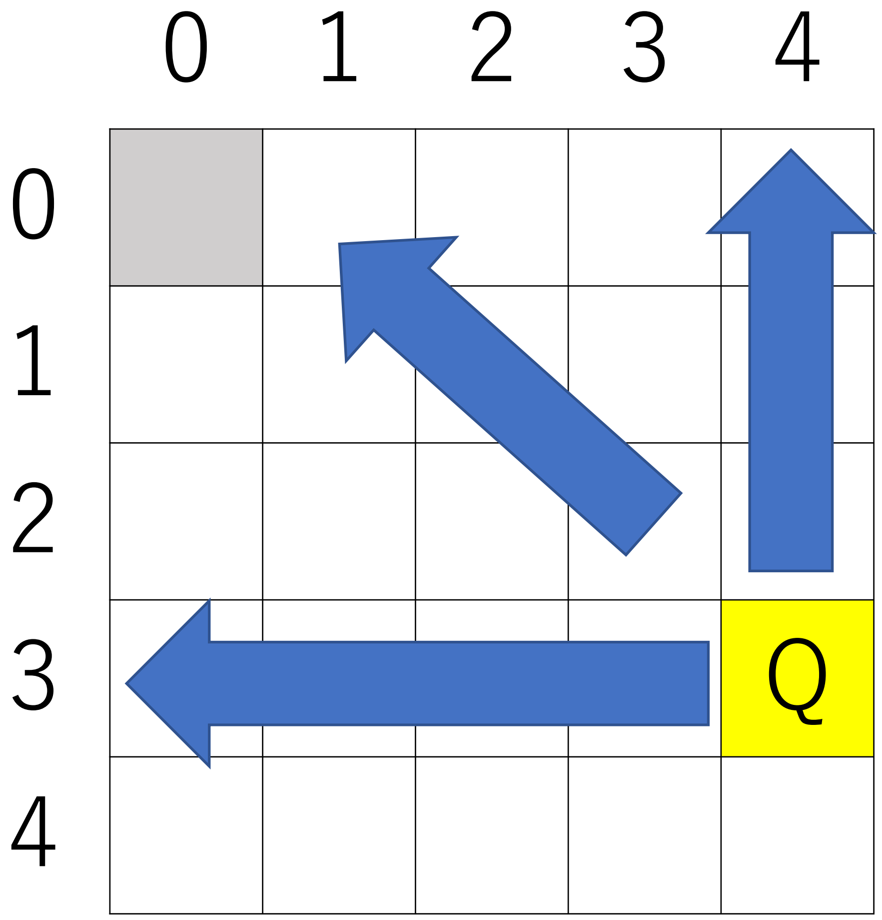
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン

Wythoffのニム：ゲームの局面は非負整数のペア(x, y)
プレイヤーは、xを好きな数だけ減らす、yを好きな数だけ減らす、xとyを同時に同じ数だけ減らす、のいずれかを行う。

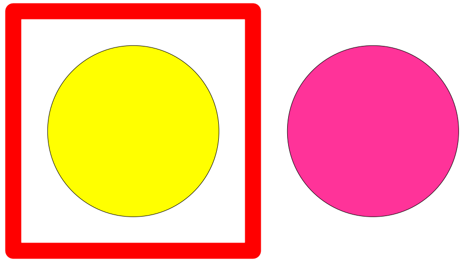
最後の着手を行ったプレイヤー($(0,0)$にしたプレイヤー)の勝ち。

コーナー・ザ・クイーンと同値

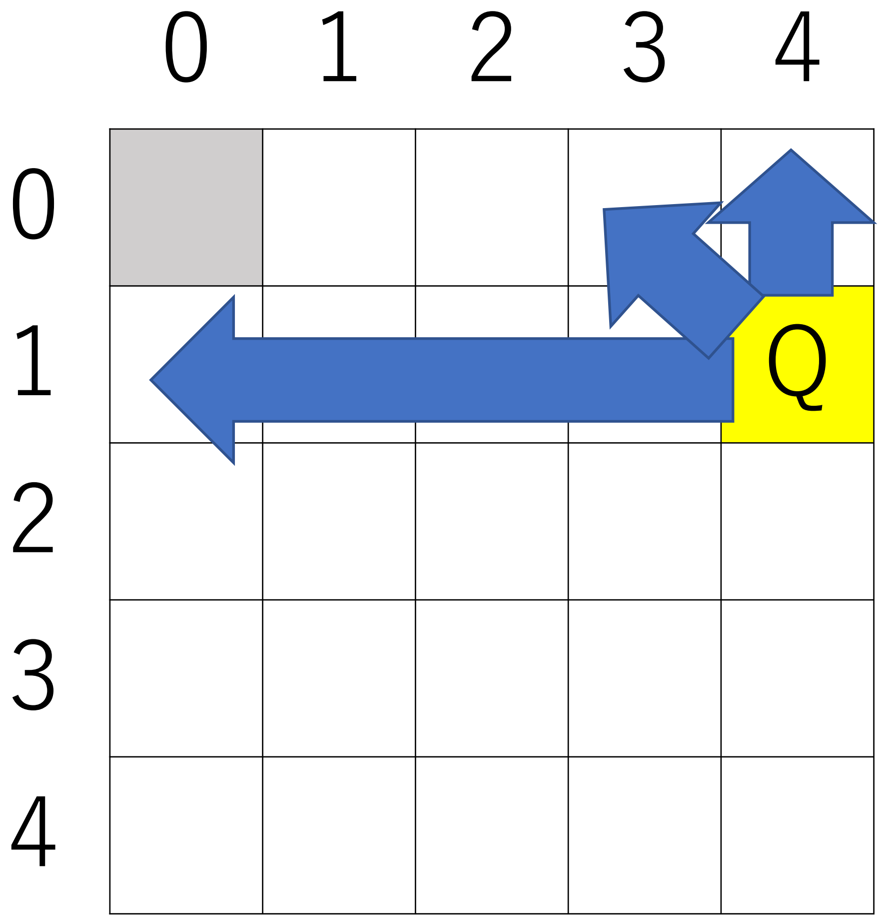
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン



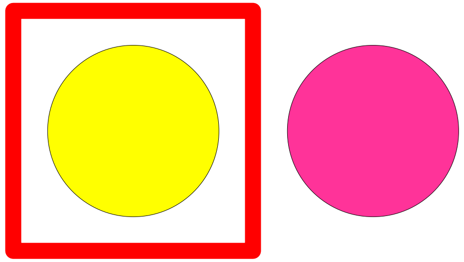
$(4,\underline{3})$



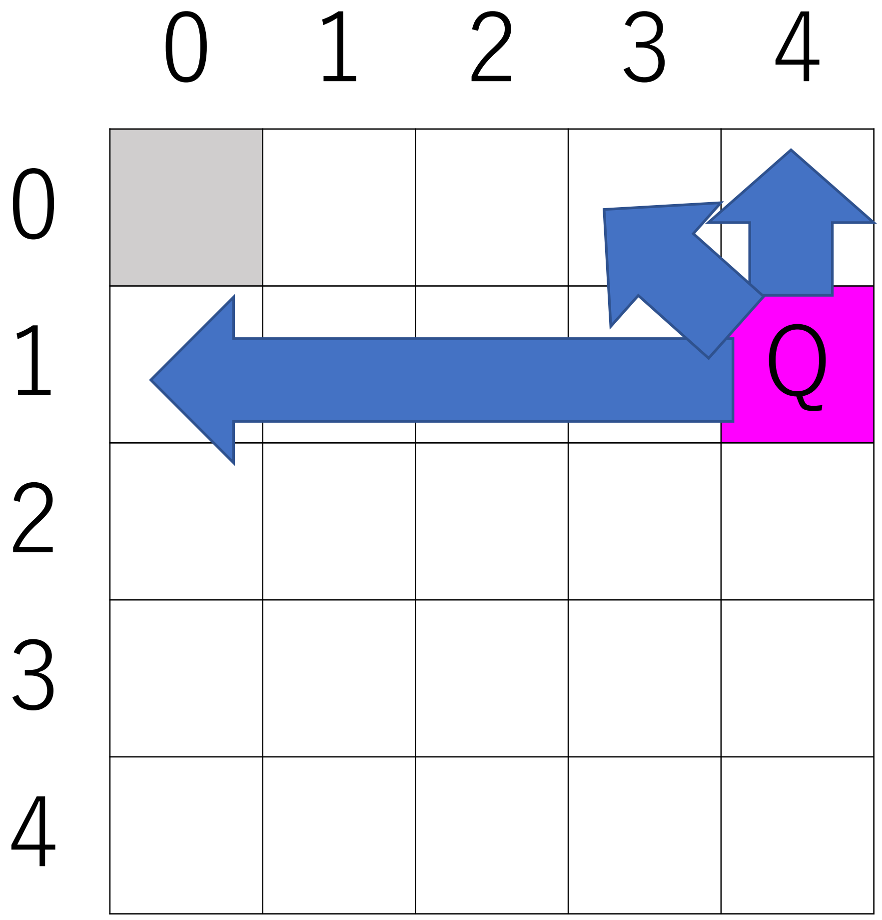
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン



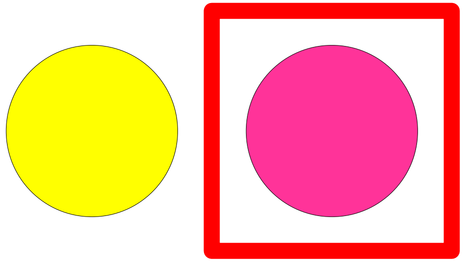
(4,1)



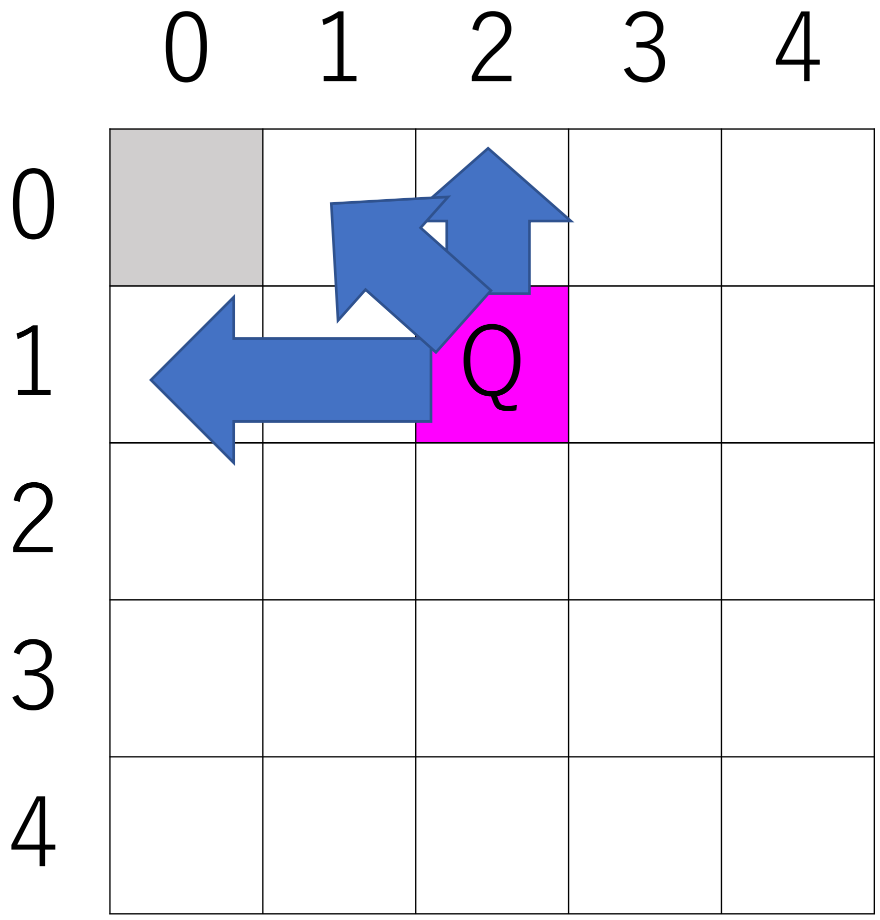
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン



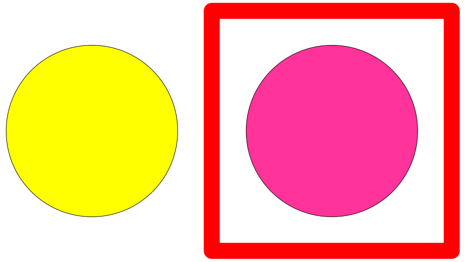
$(\underline{4},1)$



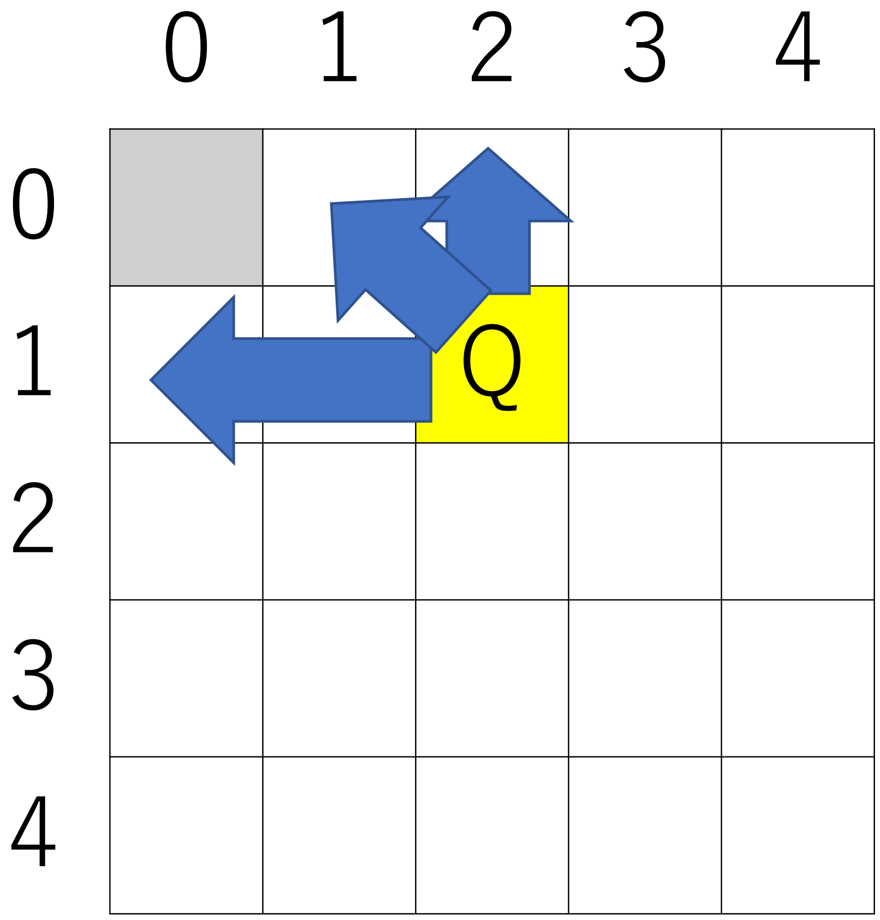
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン



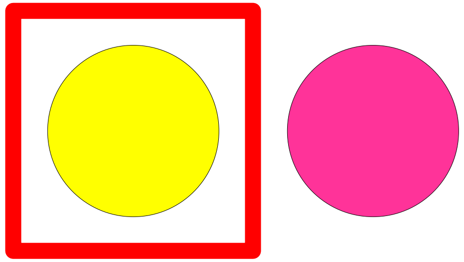
$(\underline{2},1)$



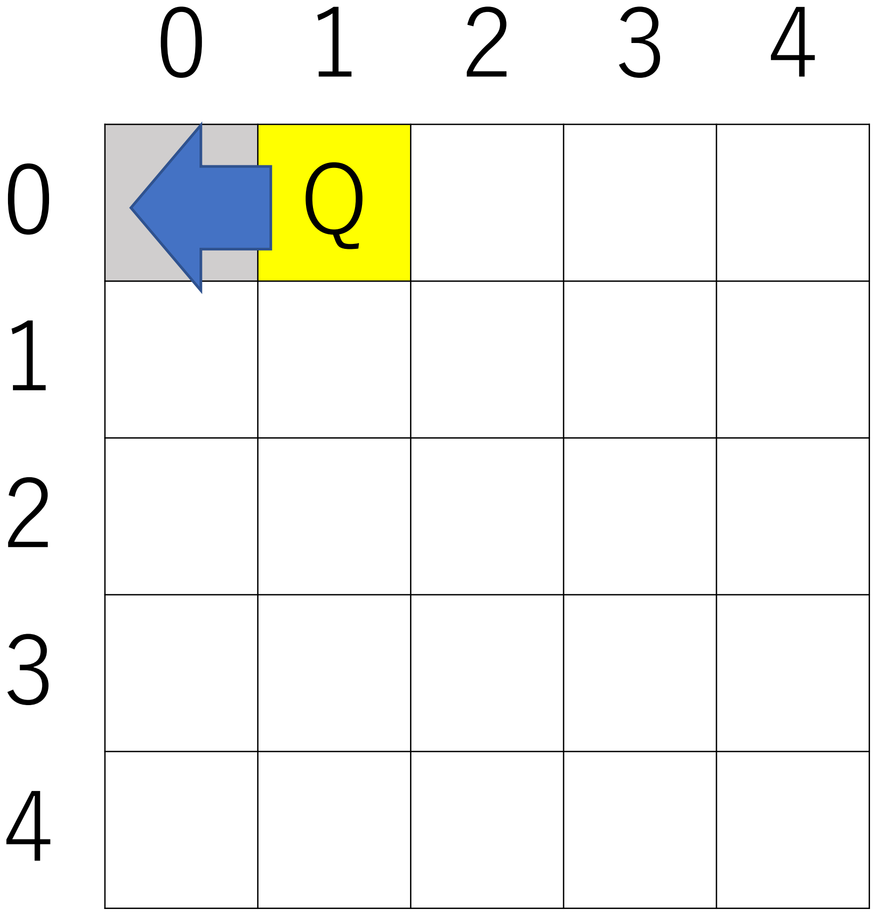
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン



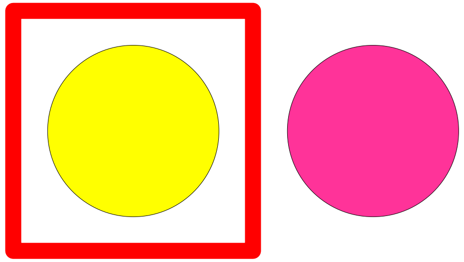
$(\underline{2},\underline{1})$



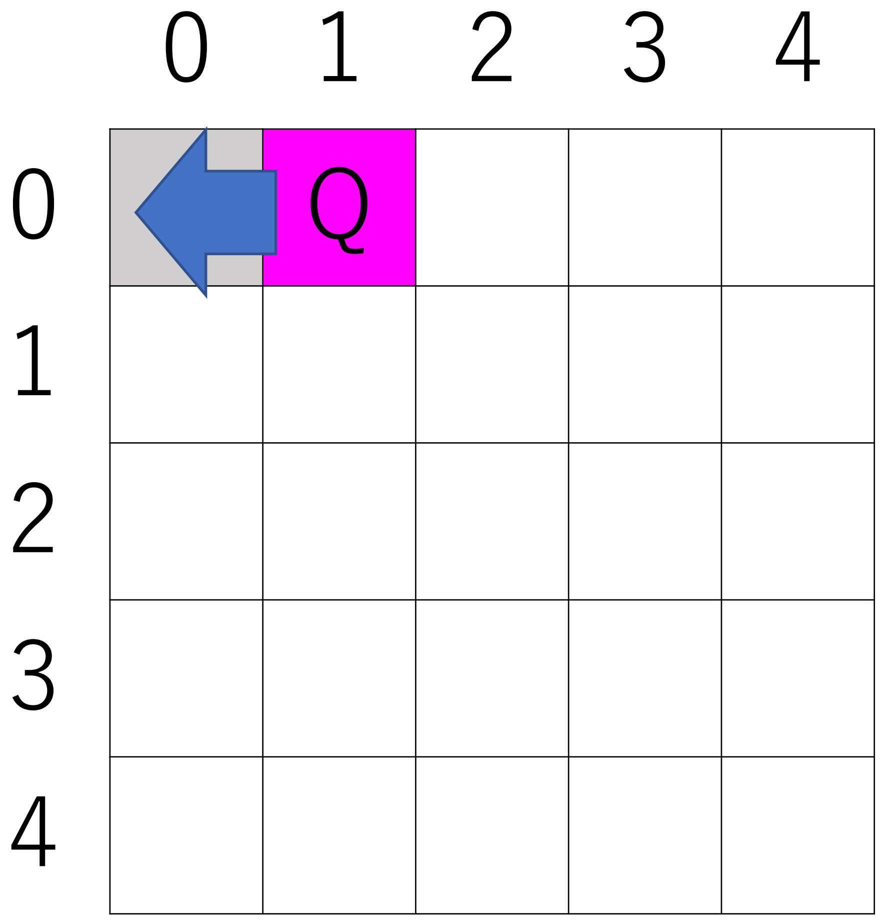
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン



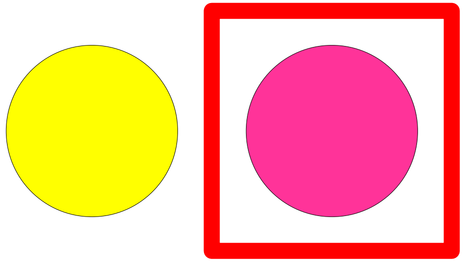
(1,0)



Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン



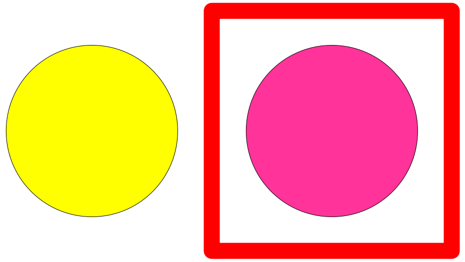
$(\underline{1},0)$



Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン

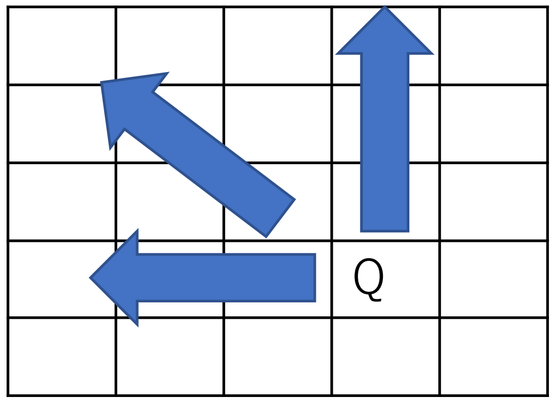
	0	1	2	3	4
0	Q				
1					
2					
3					
4					

$(\underline{0},0)$



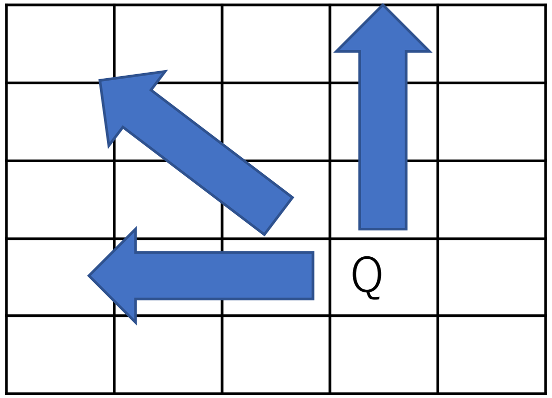
Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									



Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4



Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4

一般に(x, y)のグランディ数を求める閉じた式が存在するかは**未解決**。

ただし、グランディ数が0になる、すなわち後手に必勝戦略がある局面の判定には、素晴らしい定理がある。

Wythoffのニム／コーナー・ザ・クイーン

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4

一般に(x, y)のグランディ数を求める閉じた式が存在するかは**未解決**。

ただし、グランディ数が0になる、すなわち後手に必勝戦略がある局面の判定には、素晴らしい定理がある。

定理（Wythoff 1909）：

$(\lfloor k\varphi \rfloor, \lfloor k\varphi + k \rfloor), (\lfloor k\varphi + k \rfloor, \lfloor k\varphi \rfloor)$

（ただし、$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kは整数）

がグランディ数0の必要十分条件

Wythoffのニムの発展

- Wythoffのニムには様々な一般化、変種が考えられている

r −Wythoff：ゲームの局面は非負整数のペア(x, y)

プレイヤーは、xを好きな数だけ減らす、yを好きな数だけ減らす、またはxとyを同時に、**取り去った数の差が$\boldsymbol{r}$未満になるように**減らす、のいずれかを行う。

$r = 1$のときが通常のWythoffのニム

r-Wythoff

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	0	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	1	9	0
	3	4	5	6	7	8	9	10	2
	4	0	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	6	7	1	9	10	11	13	14	15
	7	8	9	10	11	12	14	15	16
	8	9	0	2	12	13	15	16	17

左 は$r = 3$の場合のグランディ数。
一般のrに対して、次の定理が成り立つ。

定理（Fraenkel 1982）：
$(\lfloor k\xi \rfloor, \lfloor k\xi + k \rfloor), (\lfloor k\xi + k \rfloor, \lfloor k\xi \rfloor)$
（ただし、$\xi = \frac{2-r+\sqrt{r^2+4}}{2}$,
kは整数）
がグランディ数0の必要十分条件

Wythoffのニムの発展

- Wythoffのニムには様々な一般化、変種が考えられている

サイクリック・ニムホフ：ゲームの局面は非負整数のペア(x, y)

プレイヤーは、xを好きな数だけ減らす、yを好きな数だけ減らす、またはxとyを同時に、取り去った数の**和**がr未満になるように減らす、のいずれかを行う。

サイクリック・ニムホフ

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	4	5	0	1	2	9	10	11
4	5	3	1	2	0	10	11	9
5	3	4	2	0	1	11	9	10
6	7	8	9	10	11	0	1	2
7	8	6	10	11	9	1	2	0
8	6	7	11	9	10	2	0	1

左 は$r = 3$の場合のグランディ数。サイクリック・ニムホフでは、局面(x, y)のグランディ数を求める閉じた式が知られている。

定理（Fraenkel and Lorberbom 1991）：
局面(x, y)のグランディ数は

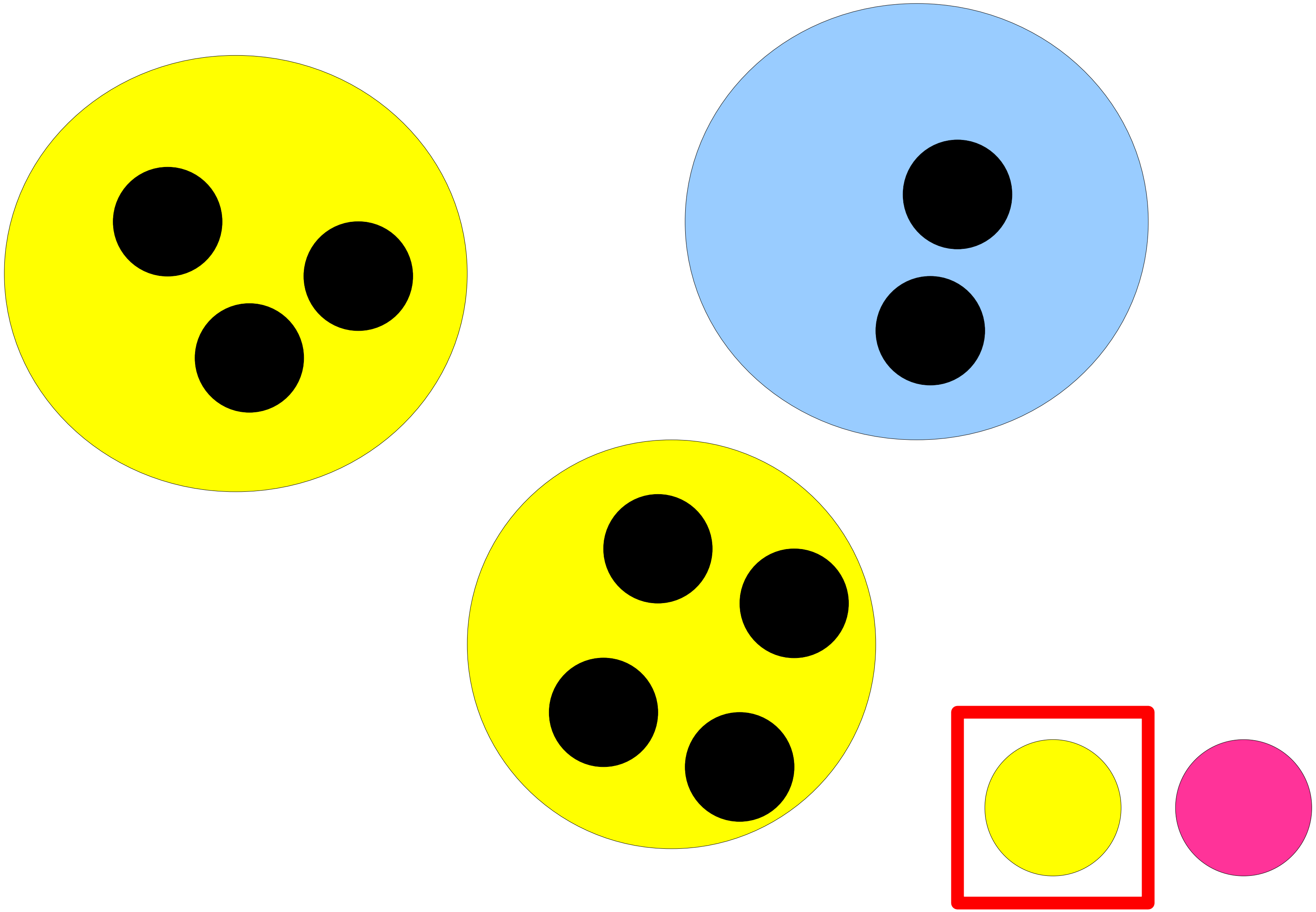
$$r\left(\left\lfloor\frac{x}{r}\right\rfloor \oplus \left\lfloor\frac{y}{r}\right\rfloor\right) + ((x + y) \bmod r)$$

となる。

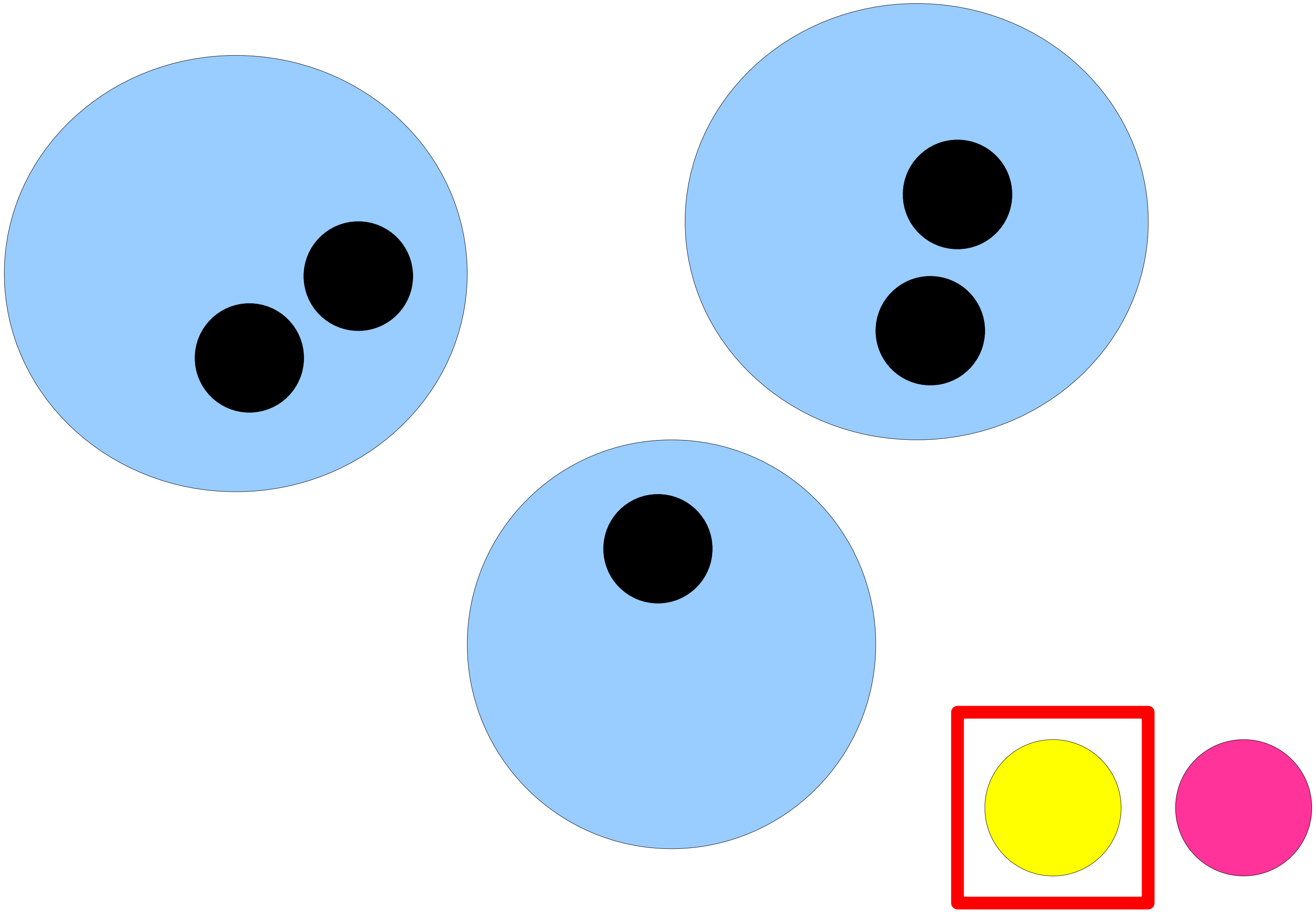
$\mathrm{Nim}_{\boldsymbol{k}}$(Mooreのニム)

- ニムとほぼ同じ
- ただし、プレイヤーが選んでいいのは１山ではなく$\boldsymbol{k}$山で、それぞれから好きなだけ（合計１個以上）石を取れる。

Nim_2



Nim$_2$



$\mathrm{Nim}_{\boldsymbol{k}}$ (Mooreのニム)

- ニムとほぼ同じ
- ただし、プレイヤーが選んでいいのは1山ではなく$\boldsymbol{k}$山で、それぞれから好きなだけ取れる。

- **定理（Moore 1910）**：

Mooreのニムの局面において、それぞれの山の石の個数を2進表記する。各桁について1の個数を数えたとき、$\boldsymbol{k+1}$の倍数であるとき、かつそのときに限り、後手に必勝戦略がある。

- **未解決問題**：グランディ数を閉じた式で求める方法は？

佐藤・ウェルターゲーム

- 通常のニムに、**同じ石の個数の山が生じてはいけない**という制限を加えたゲーム
- ヤング図形を用いた局面と着手の表現方法が知られている。
- 最近、表現論とのつながりが明らかにされた。

本講演の概要

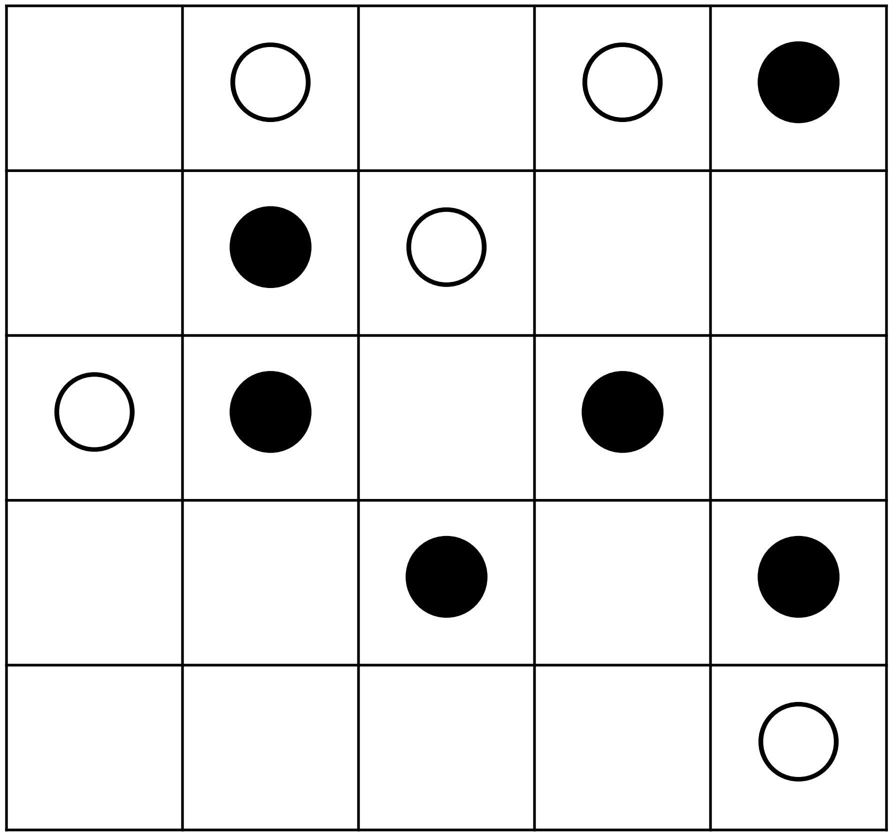
- 序　組合せゲーム理論とは
- 第１部　正規形不偏ゲームについて
- **第２部　正規形非不偏ゲームについて**
- 第３部　さらなる発展と最近の研究
- おわりに

第２部
正規形非不偏ゲームについて

前編：非不偏ゲームの性質

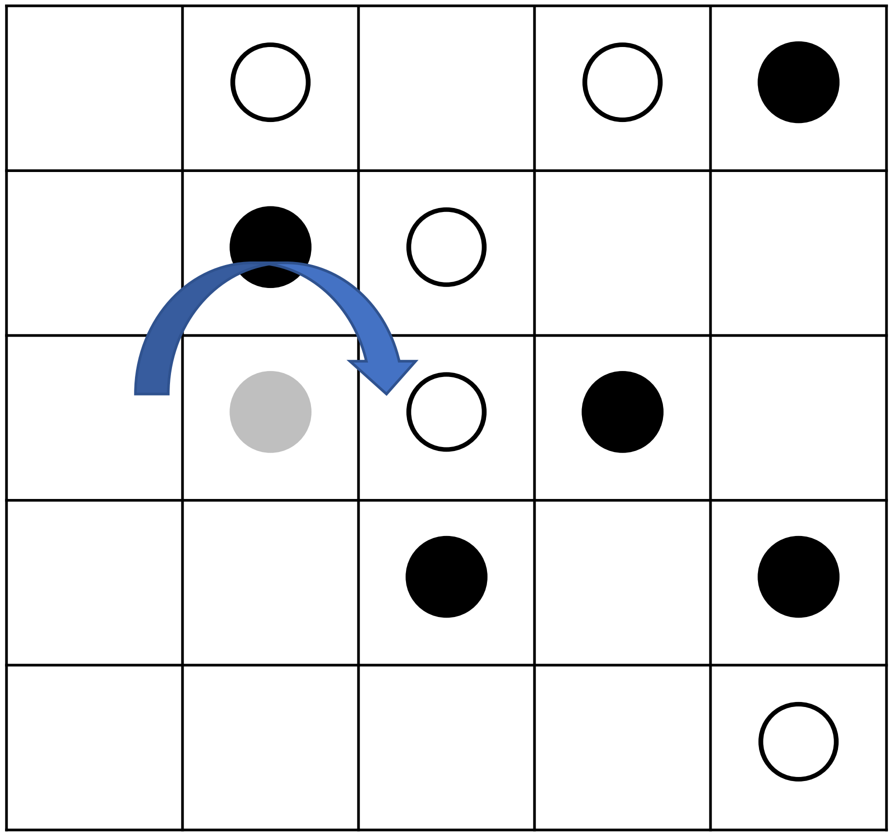
例：(一般化)コナネ

- **<u>黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）</u>**
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



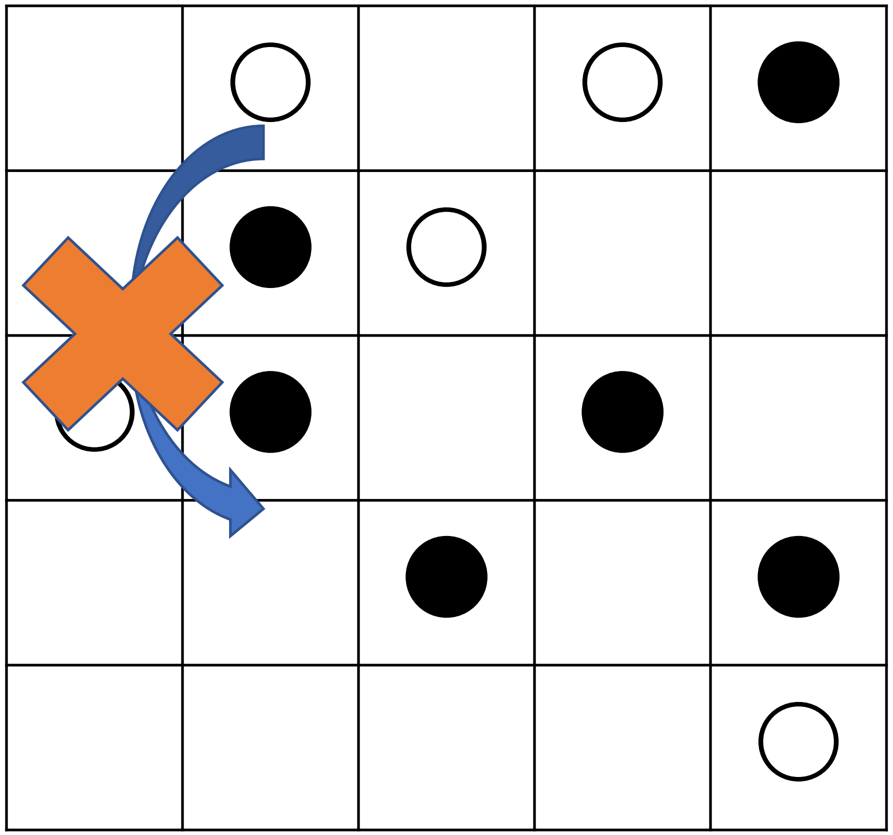
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- **プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。**
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



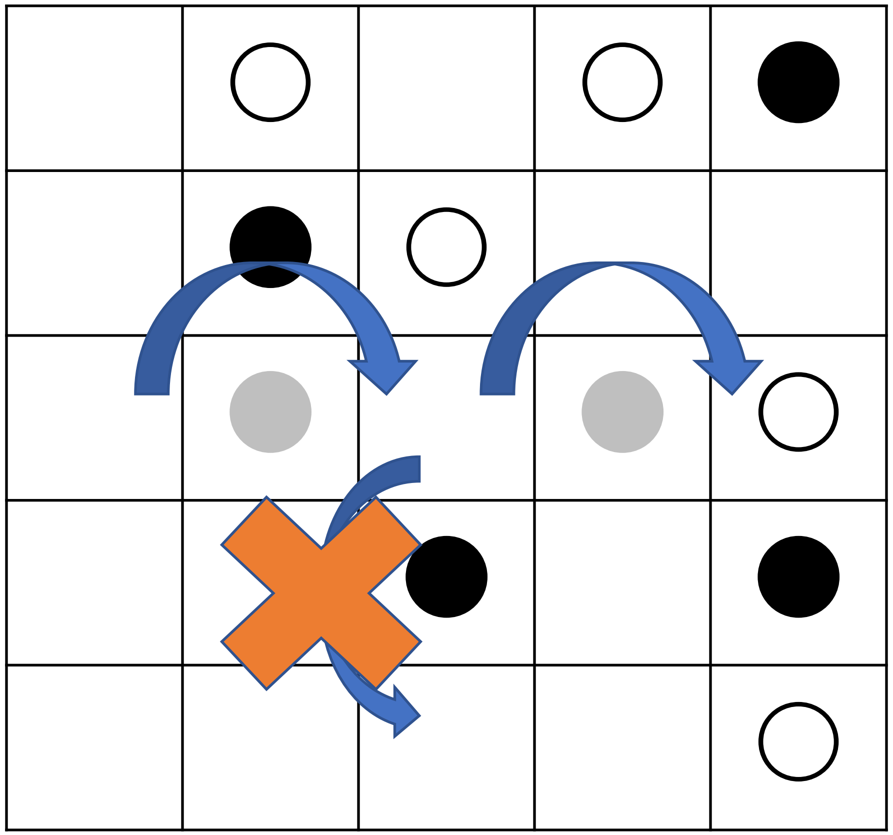
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- **２つ以上同時に飛び越えることはできない。**
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



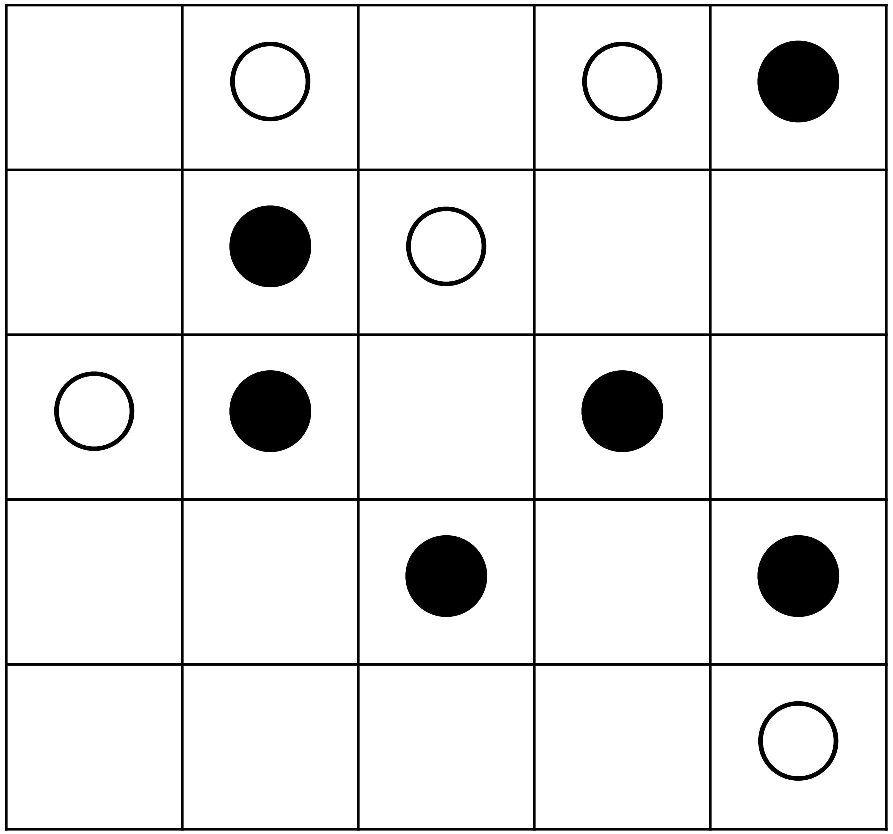
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- **飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。**
- 駒を動かせなくなった方が負け



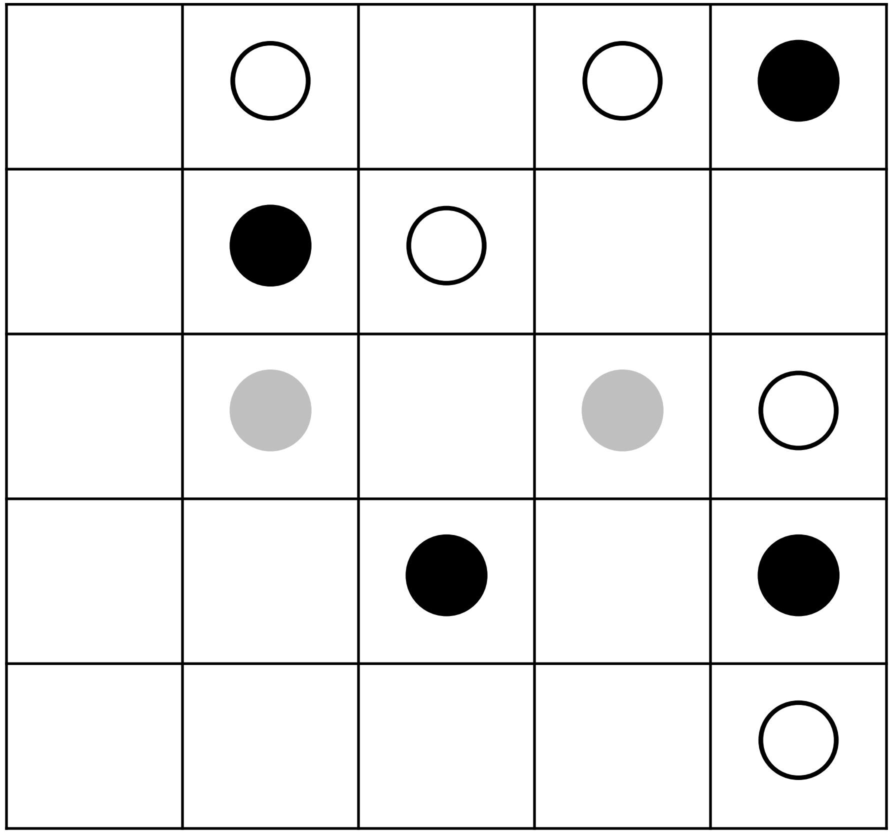
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



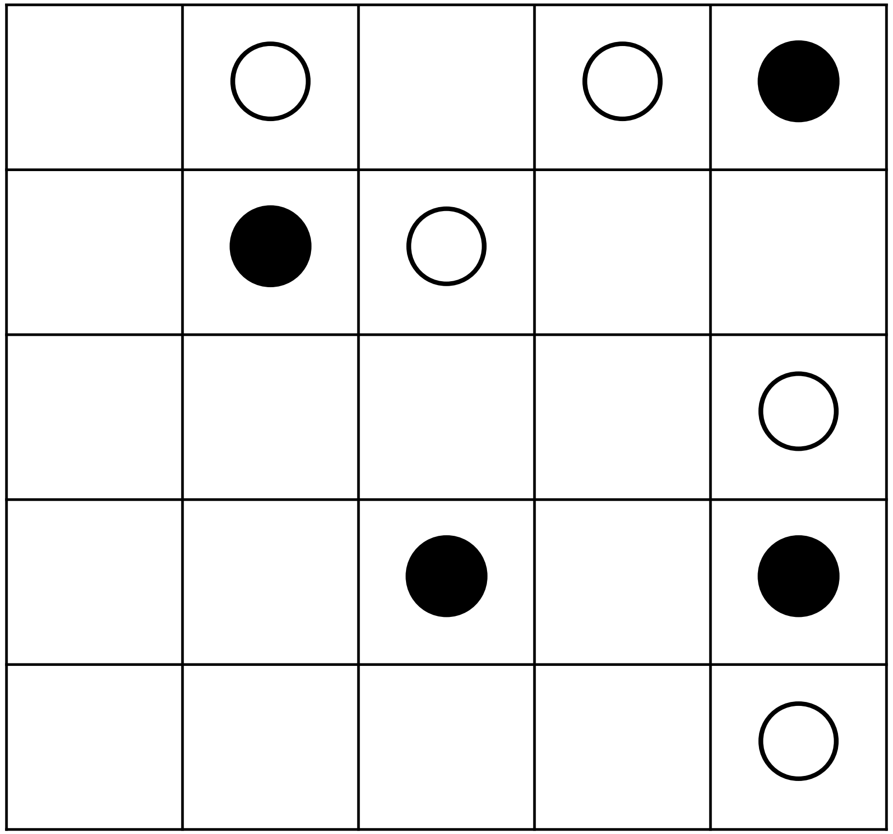
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



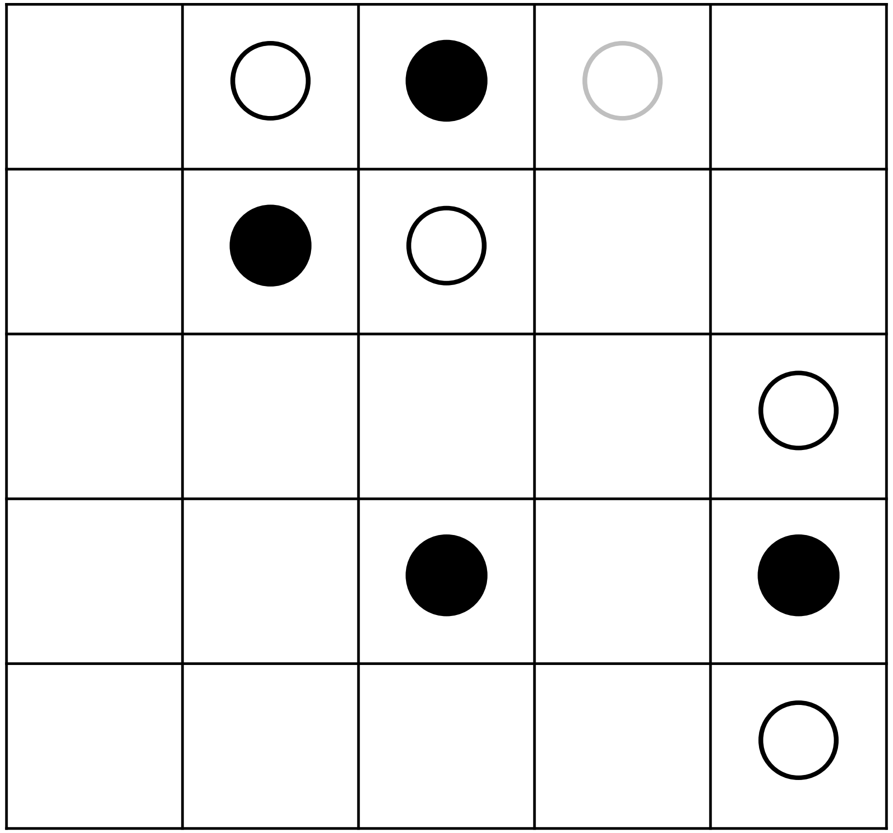
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



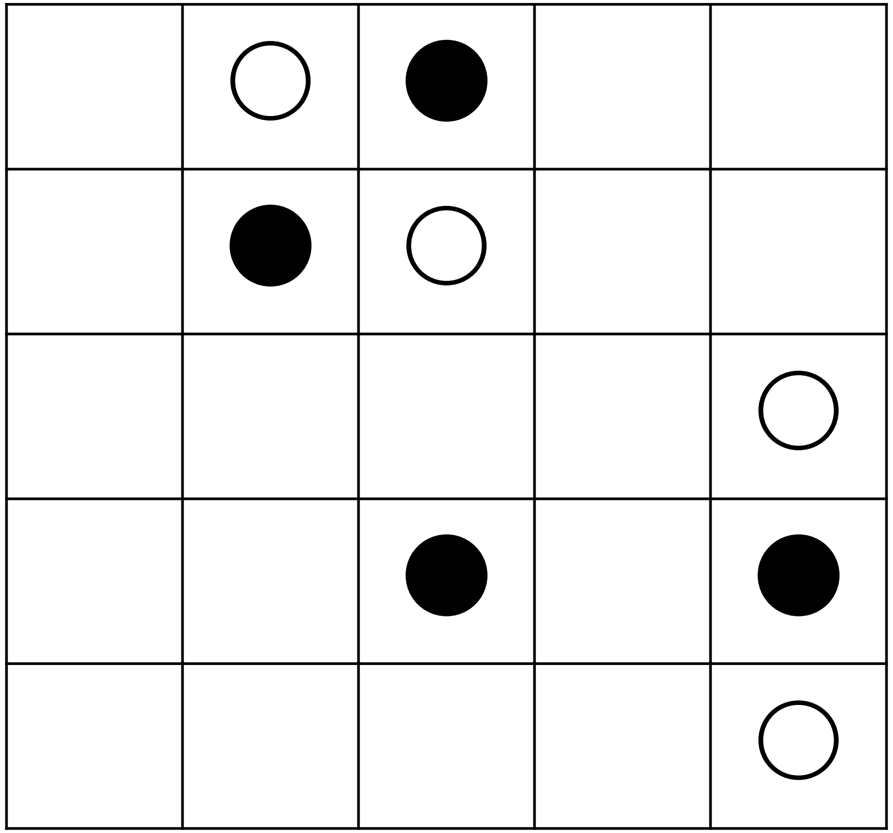
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



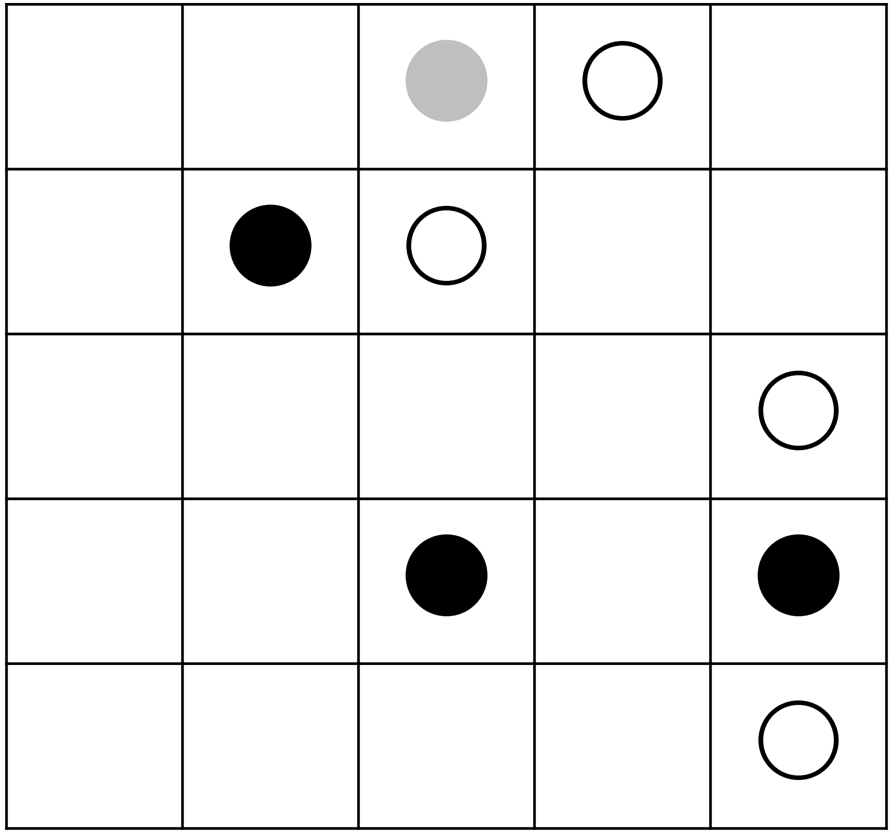
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



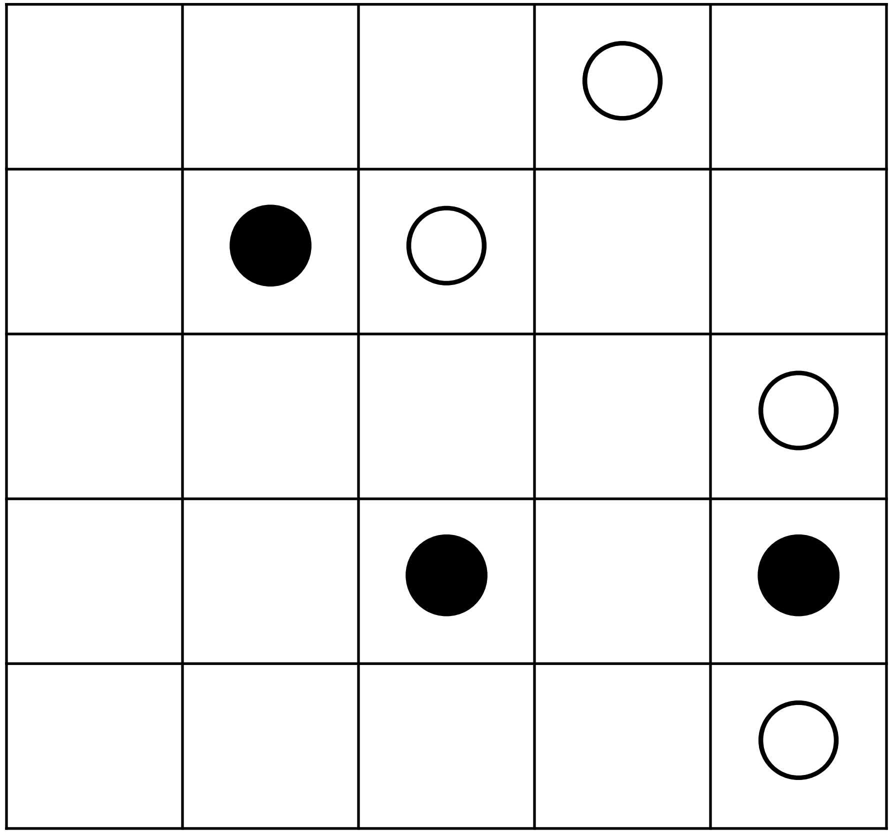
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



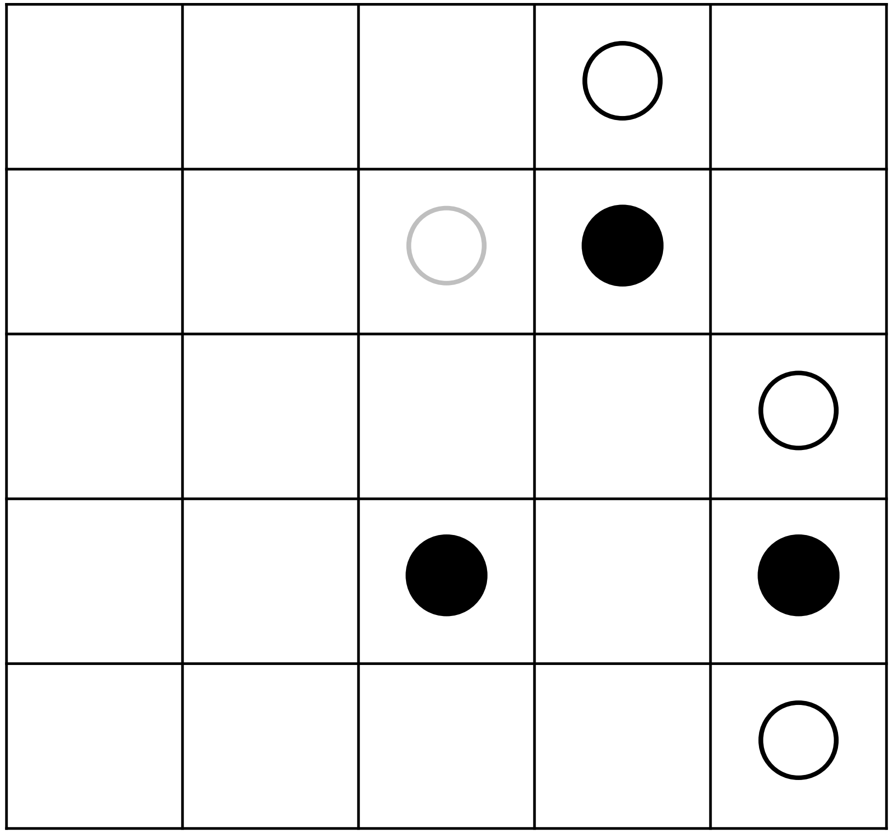
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



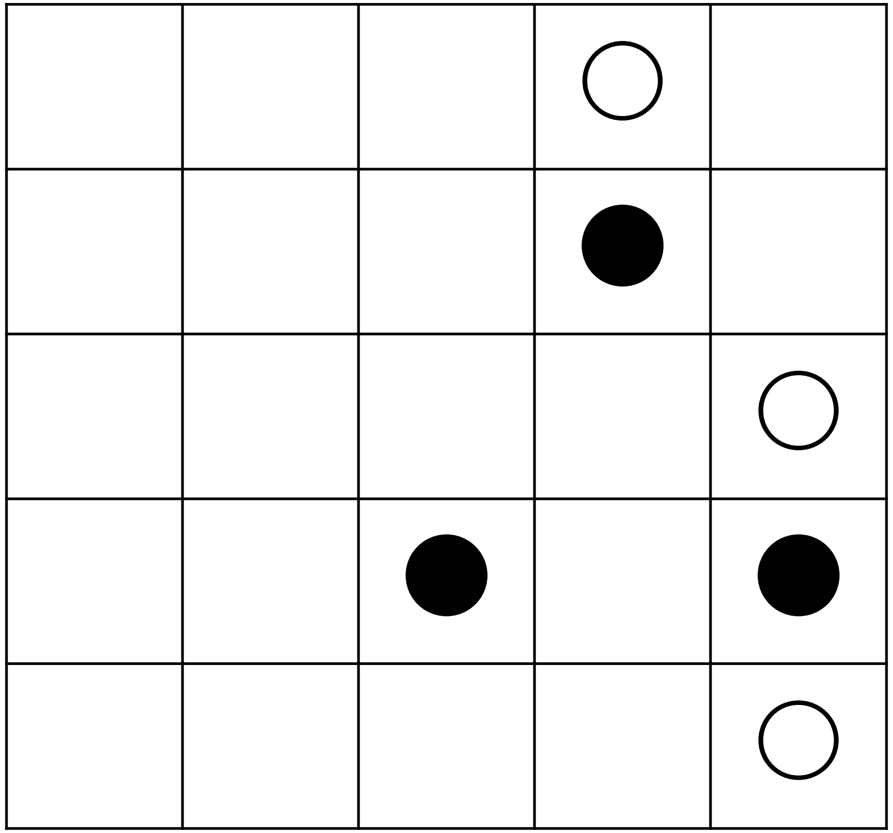
例；(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



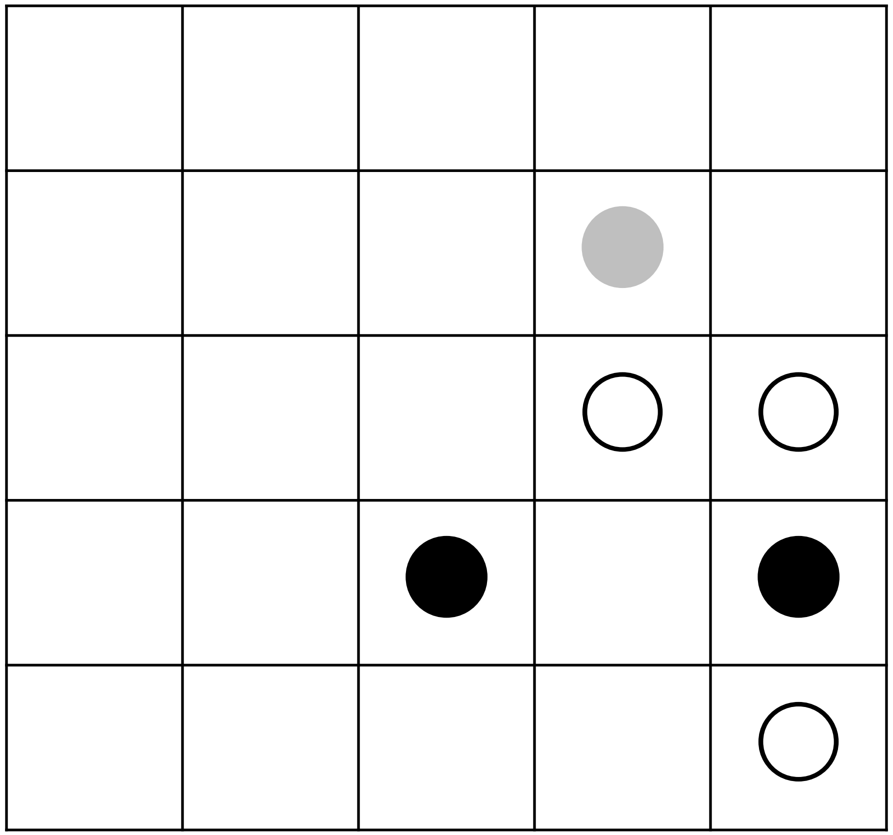
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



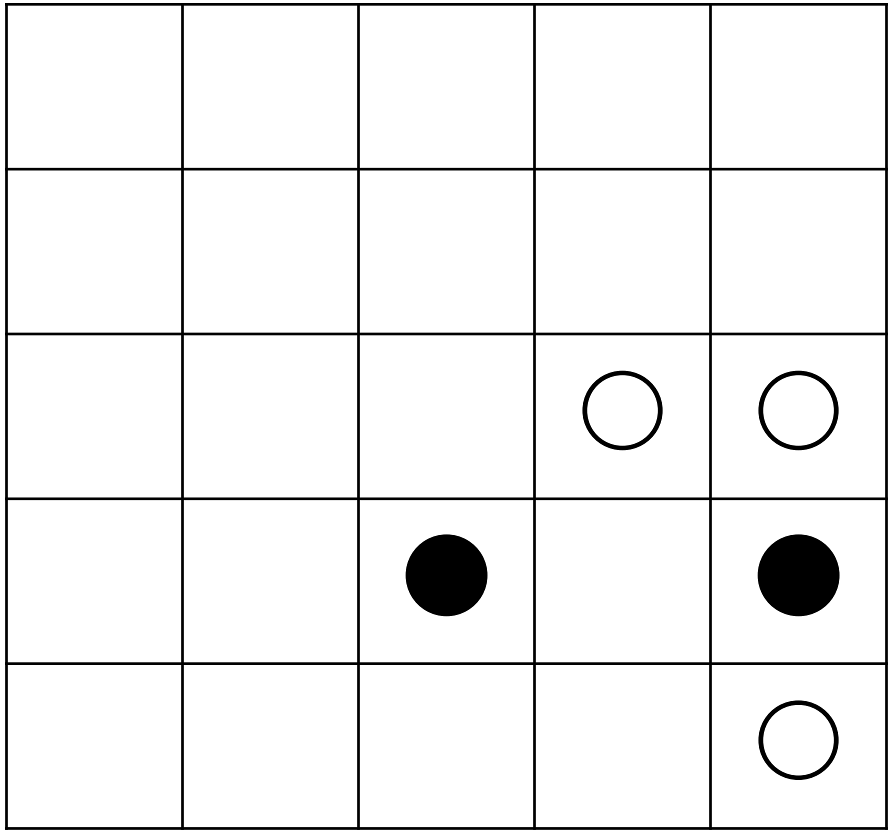
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



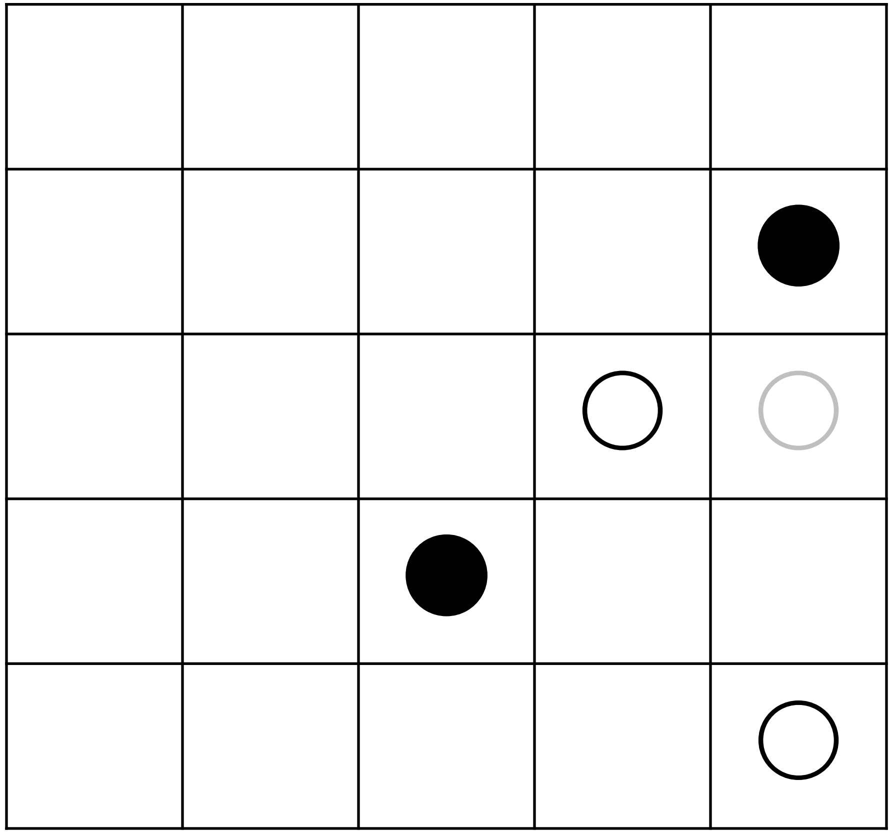
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



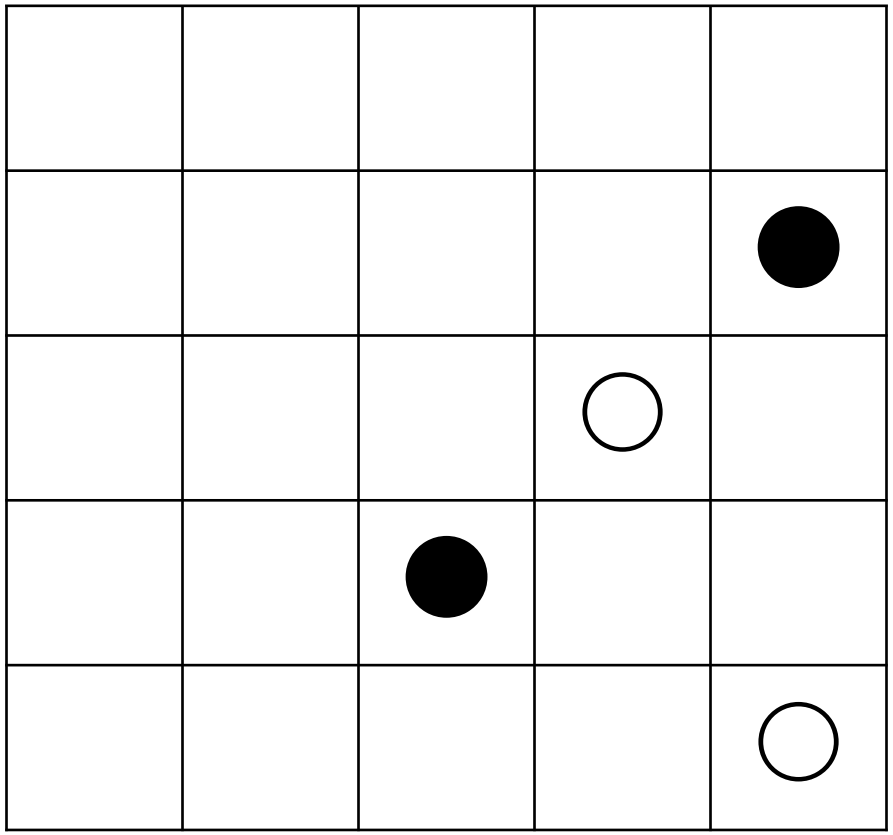
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- 駒を動かせなくなった方が負け



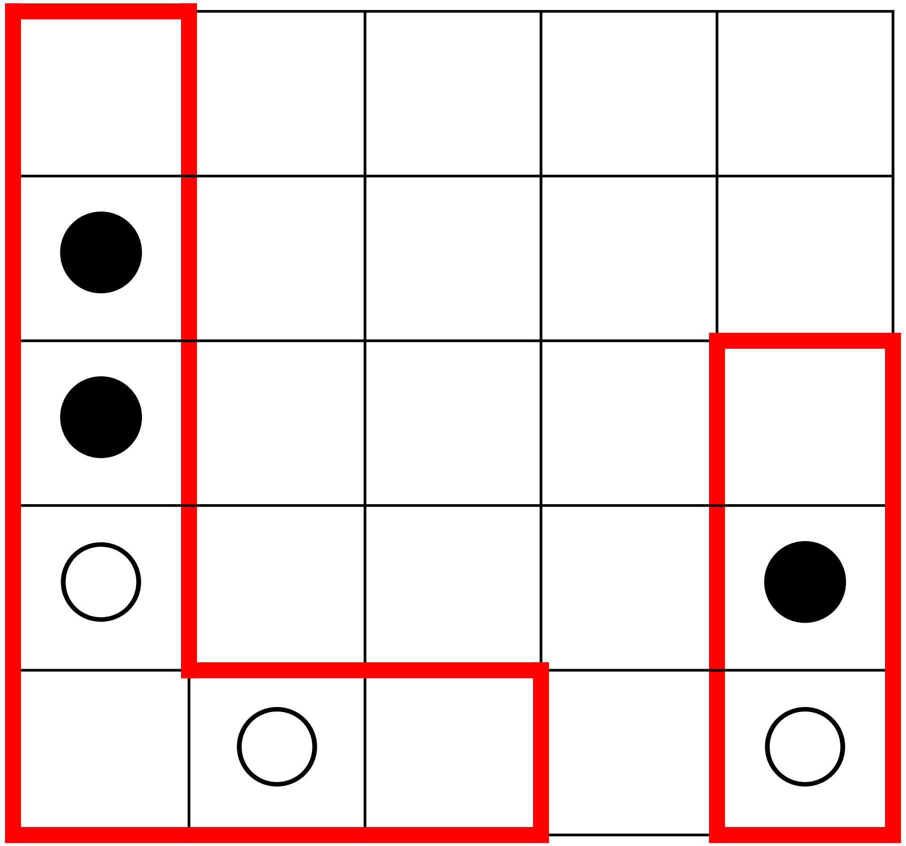
例：(一般化)コナネ

- 黒プレイヤー（左と呼ぶ）と白プレイヤー（右と呼ぶ）
- プレイヤーは自分の駒を１つ選び、縦横に隣接する相手の駒を１つ飛び越し、相手の駒を消す。
- ２つ以上同時に飛び越えることはできない。
- 飛び越えたあとでまた敵駒と隣接している場合は、方向転換しない場合のみ続けて飛び越えられる。
- **駒を動かせなくなった方が負け**



局面の直和

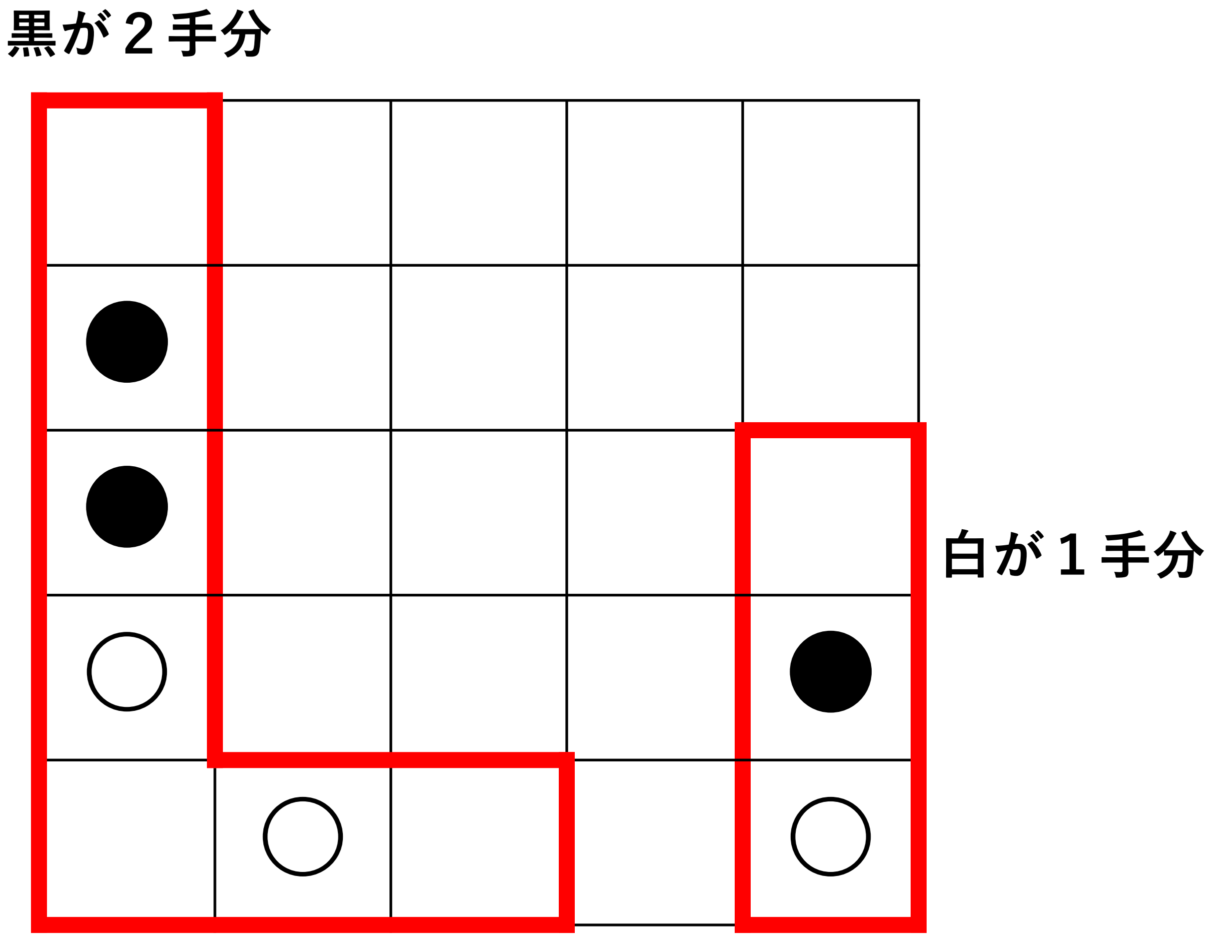
- 黒にn手分、あるいは白にm手分の権利がある局面というものが考えられる。
- そういう局面同士が、互いに影響を与えないくらい離れていたら、すべて足し合わせて差し引きすればどちらが勝てるかわかる。



局面の直和

- 黒にn手分、あるいは白にm手分の権利がある局面というものが考えられる。

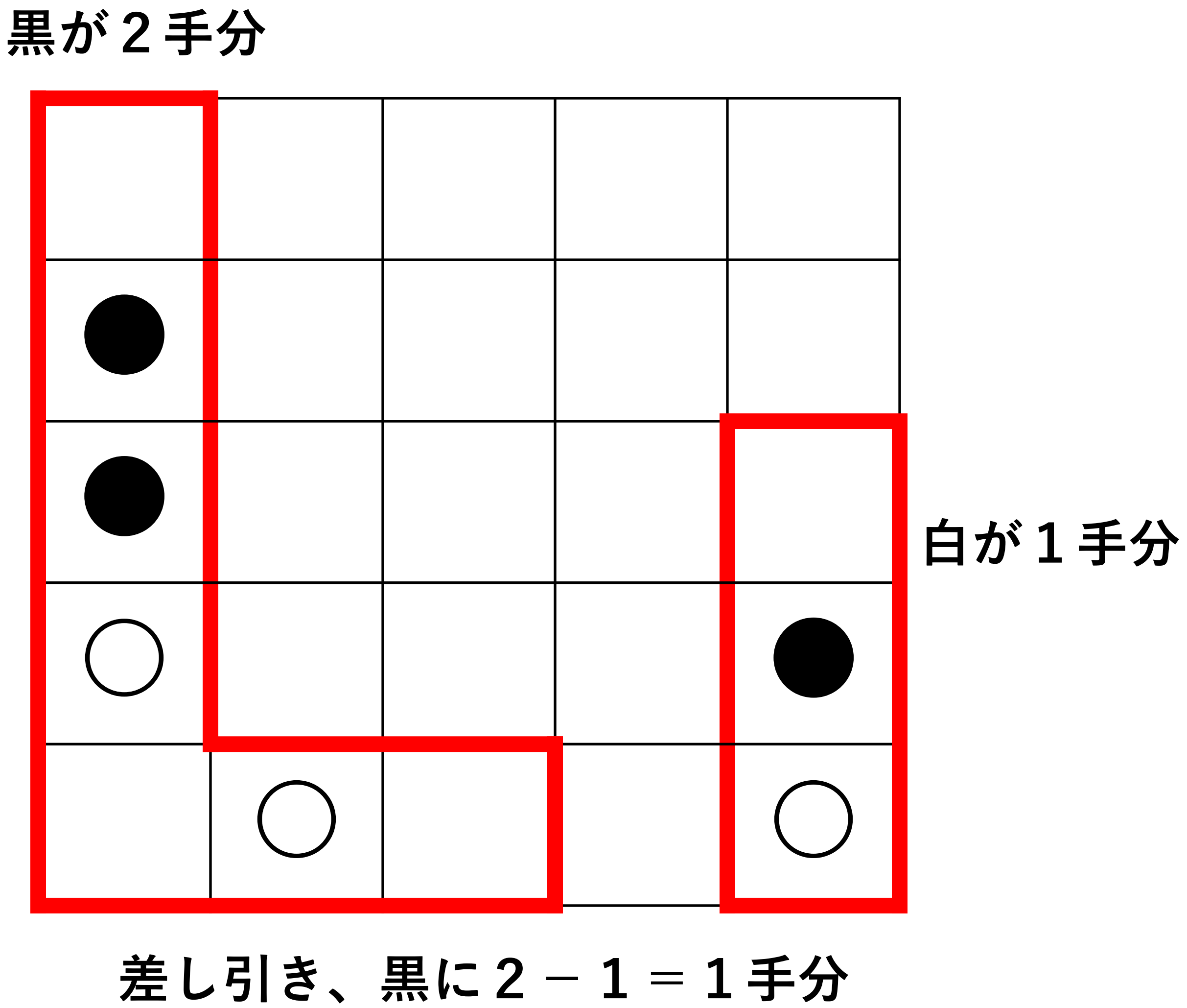
- そういう局面同士が、互いに影響を与えないくらい離れていたら、すべて足し合わせて差し引きすればどちらが勝てるかわかる。



局面の直和

- 黒にn手分、あるいは白にm手分の権利がある局面というものが考えられる。

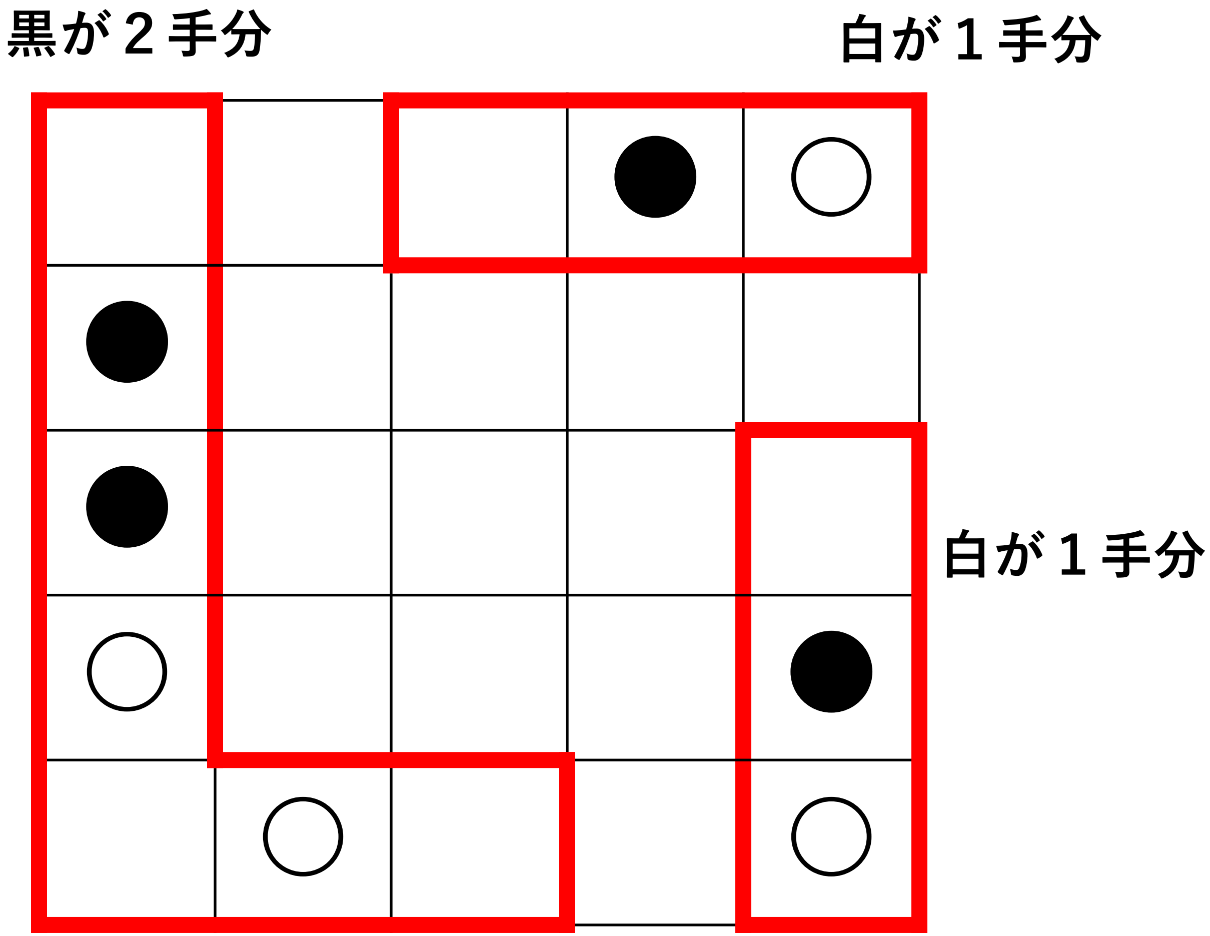
- そういう局面同士が、互いに影響を与えないくらい離れていたら、すべて足し合わせて差し引きすればどちらが勝てるかわかる。



局面の直和

- 黒にn手分、あるいは白にm手分の権利がある局面というものが考えられる。

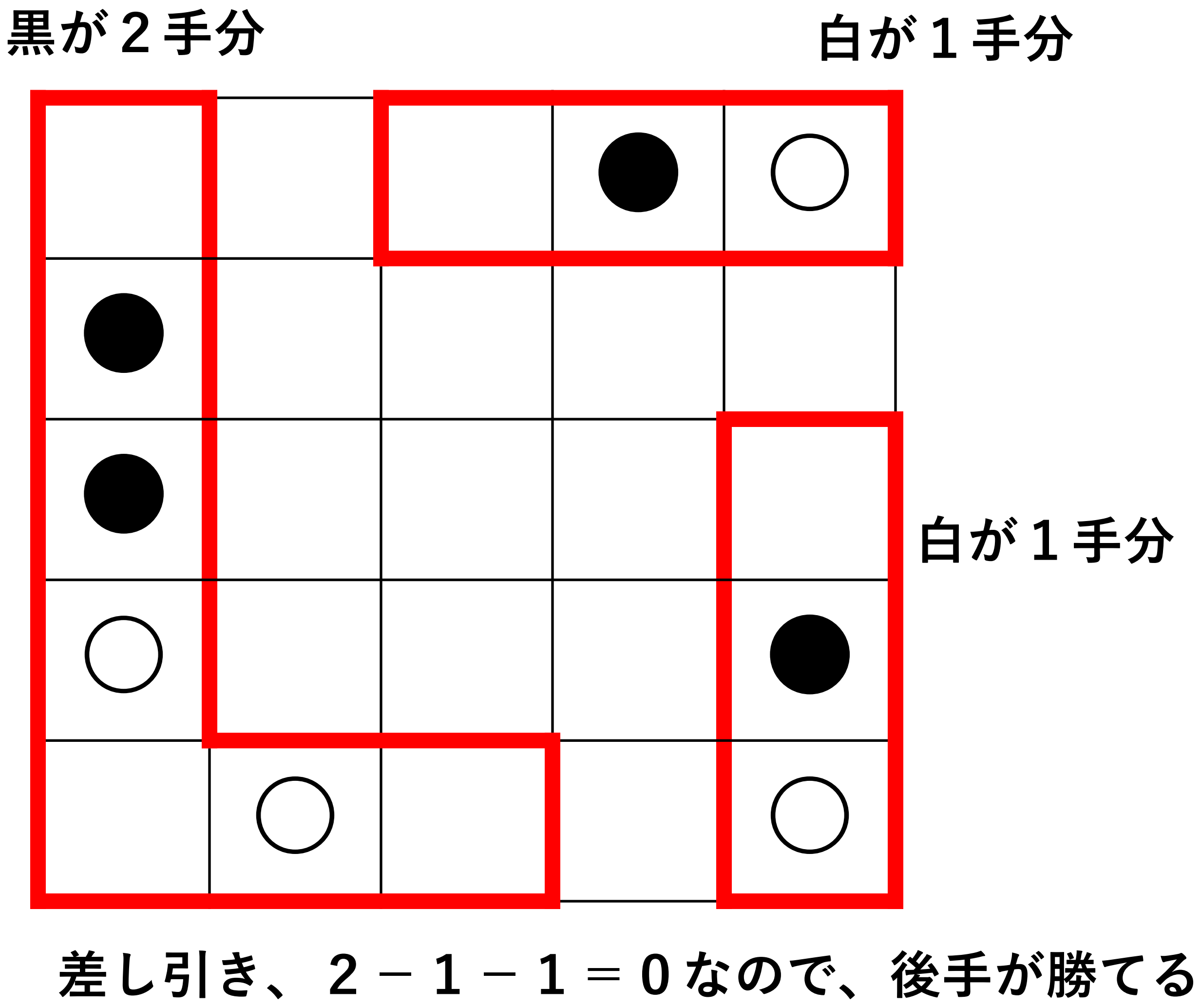
- そういう局面同士が、互いに影響を与えないくらい離れていたら、すべて足し合わせて差し引きすればどちらが勝てるかわかる。



局面の直和

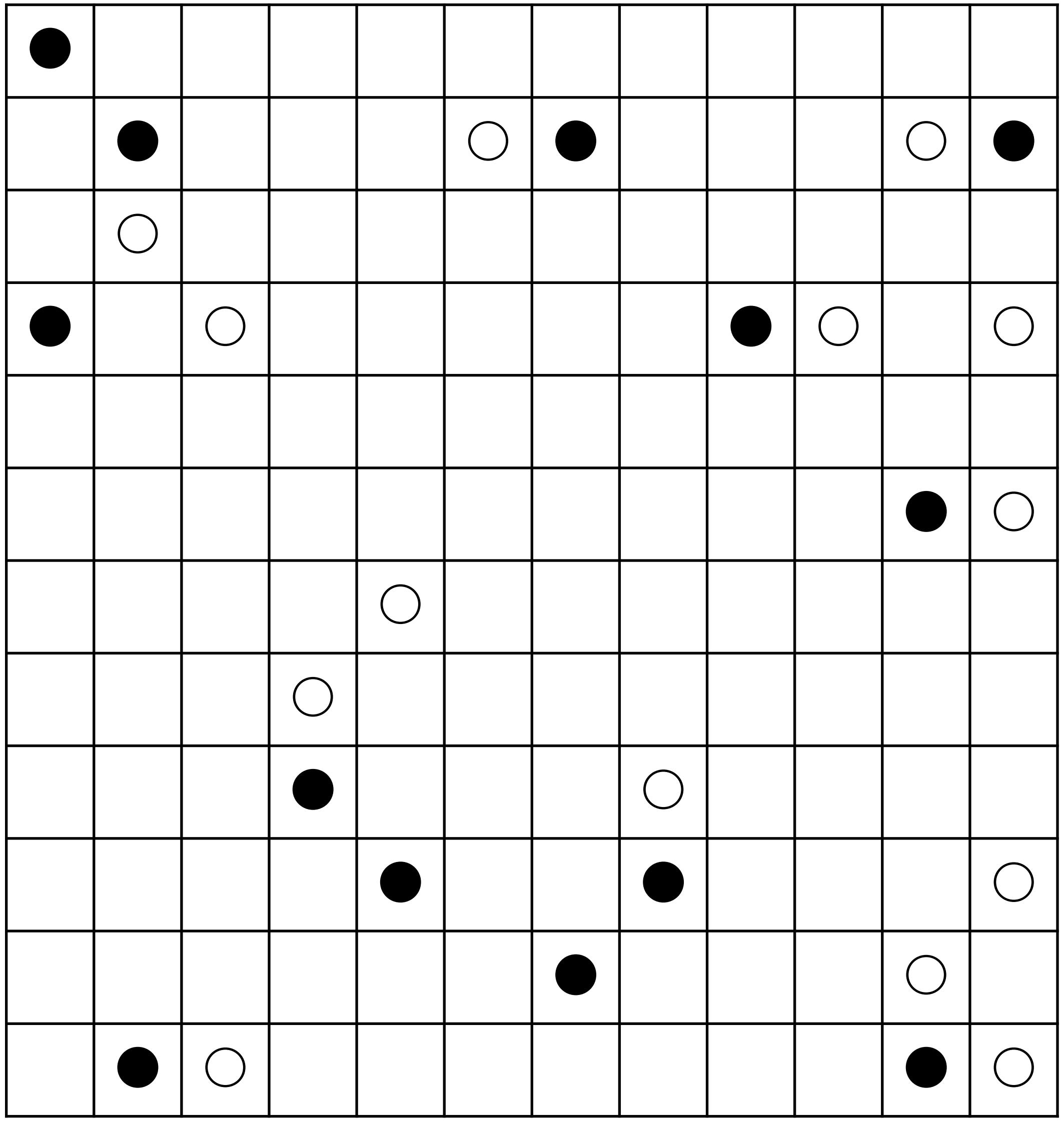
- 黒にn手分、あるいは白にm手分の権利がある局面というものが考えられる。

- そういう局面同士が、互いに影響を与えないくらい離れていたら、すべて足し合わせて差し引きすればどちらが勝てるかわかる。



局面の直和

- 一般には、小さく分割できても、どちらかにn手の余裕があるという言い方はできない局面もたくさんある。
- しかし、そのような局面であっても、非不偏ゲームの理論を使えば、足し合わせて必勝戦略保持者を確定することができる。

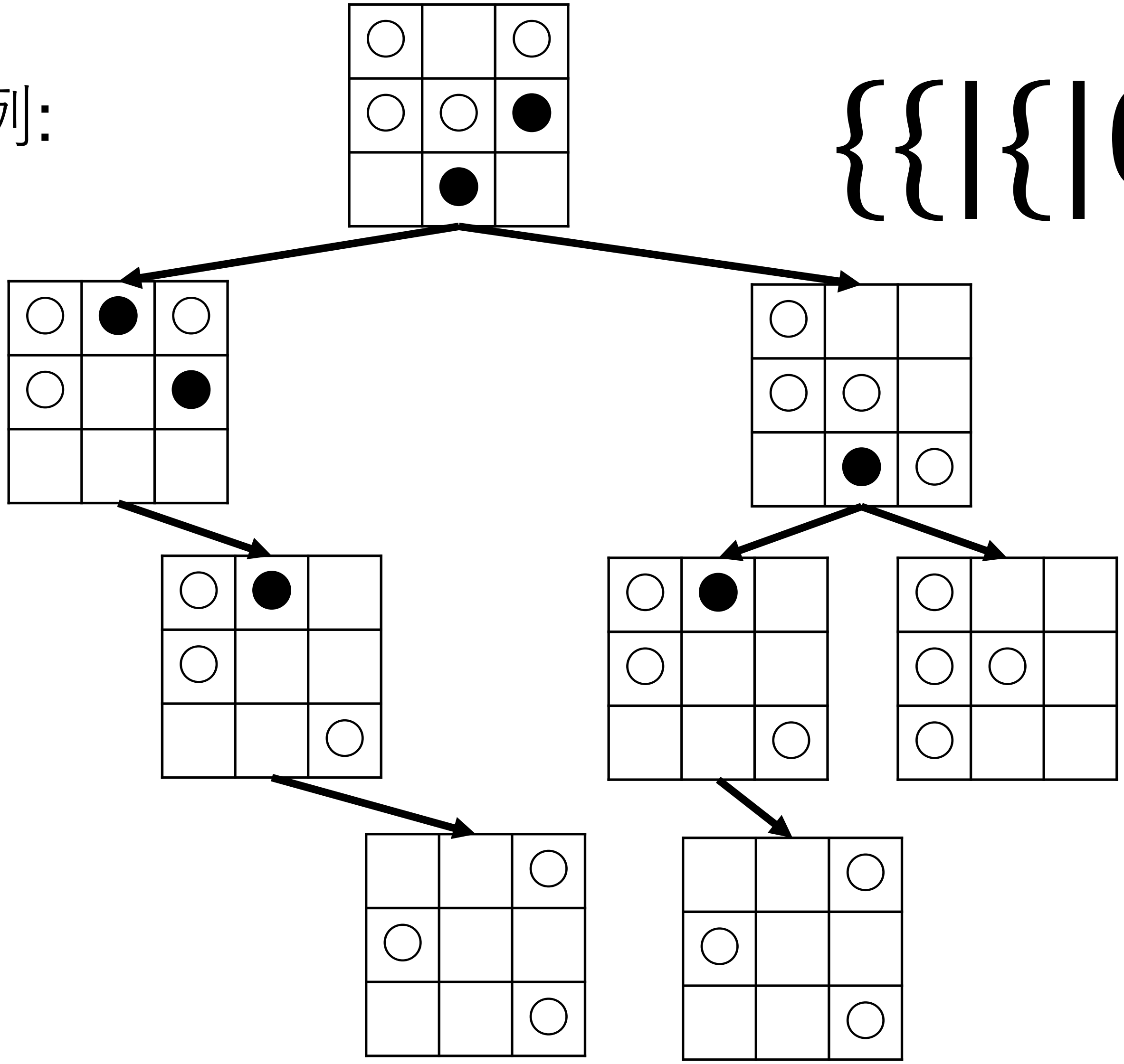


局面の定義

- ゲーム木を文字列として表現する。
- $\{|\}$は局面である。これを$\mathbf{0}$と呼ぶ（**<u>終了局面</u>**）。
- $G_{L_1}, G_{L_2}, \ldots, G_{L_n}, G_{R_1}, G_{R_2}, \ldots, G_{R_m}$が局面であるとき、$\{G_{L_1}, G_{L_2}, \ldots, G_{L_n} | G_{R_1}, G_{R_2}, \ldots, G_{R_m}\}$は局面である。
- $G_{L_1}, G_{L_2}, \ldots, G_{L_n}$を**左選択肢**、$G_{R_1}, G_{R_2}, \ldots, G_{R_m}$を**右選択肢**と呼ぶ。
- 非不偏ゲームの局面全体の集合を$\tilde{\mathbb{G}}$とする。

局面の再帰的定義

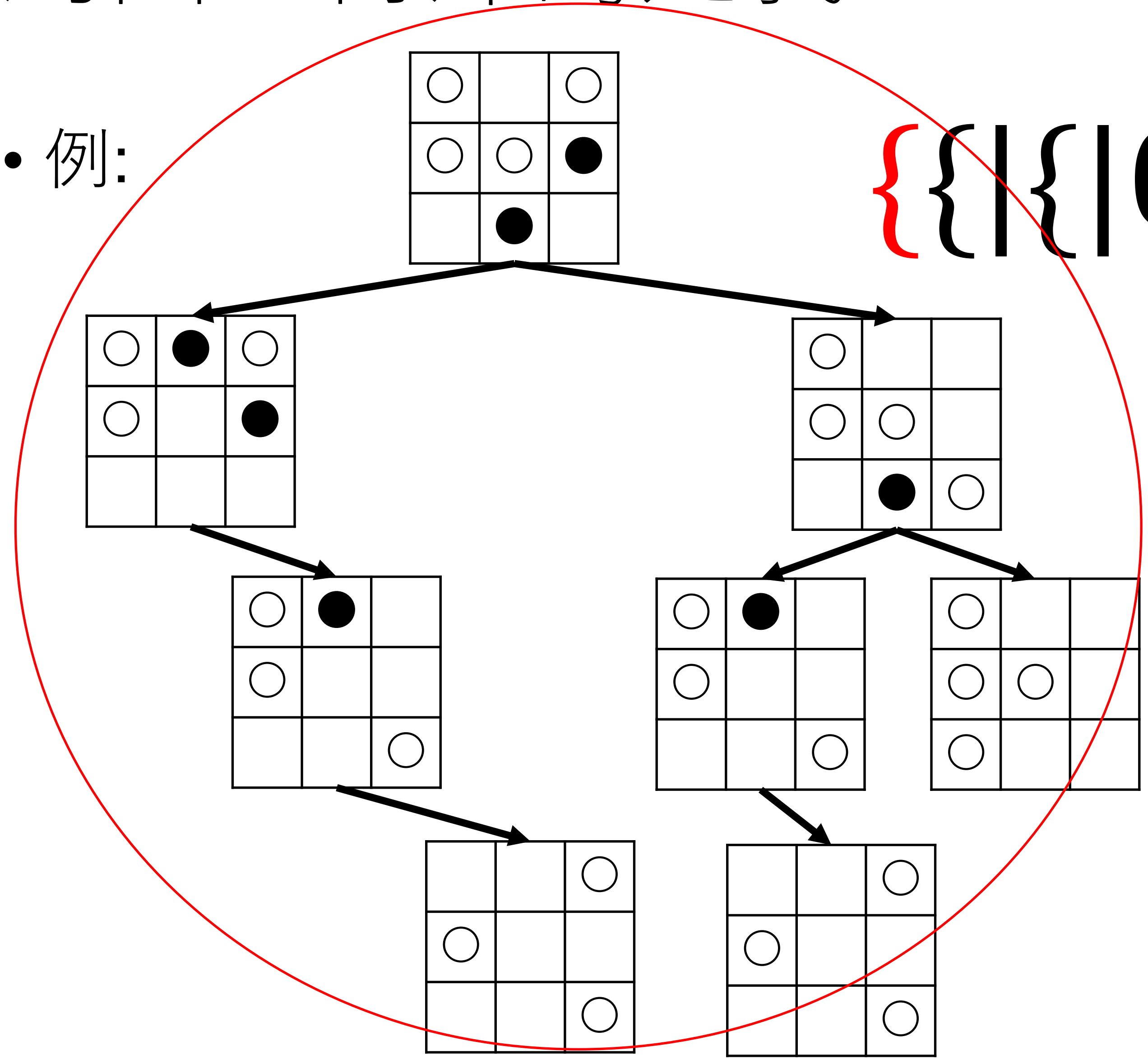
- 例:



$$\{\{|\{|0\}\}|\{\{|0\}|0\}\}$$

局面の再帰的定義

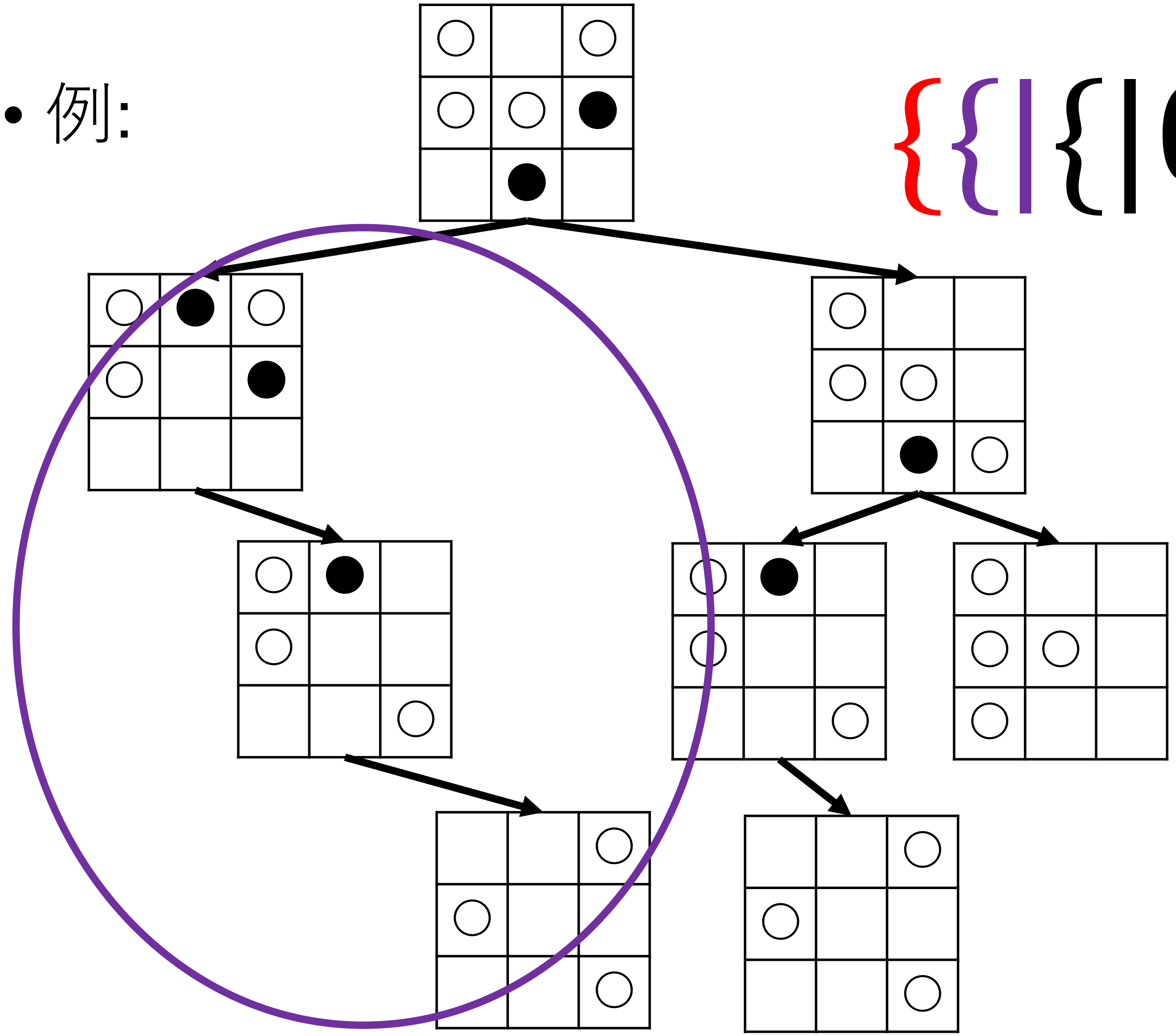
- 例:



$$\{\{\,|\,\{\,|\,0\}\}\,|\,\{\{\,|\,0\}\,|\,0\}\}$$

局面の再帰的定義

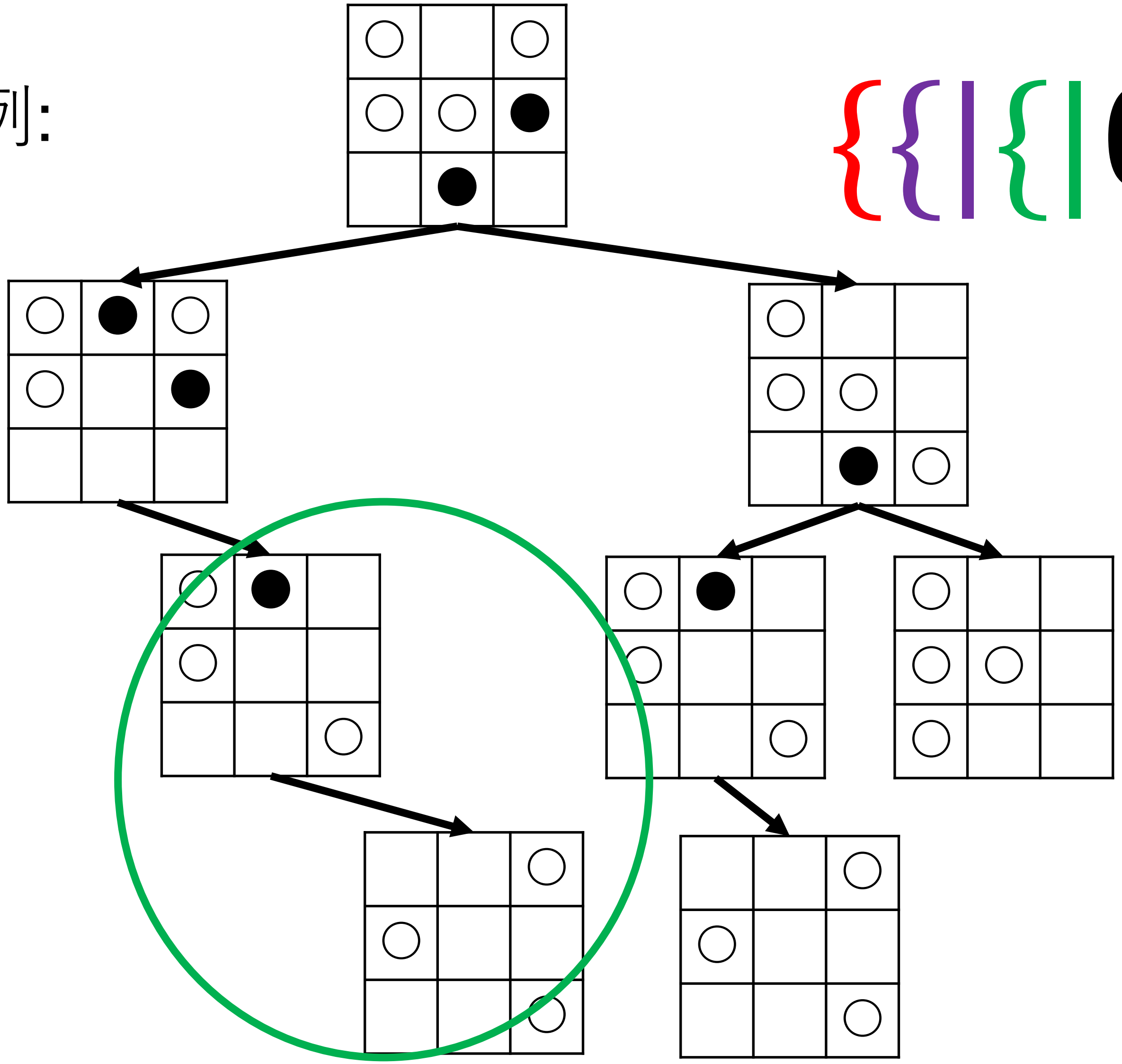
- 例:



$\{\{|\{|0\}\}|\{\{|0\}|0\}\}$

局面の再帰的定義

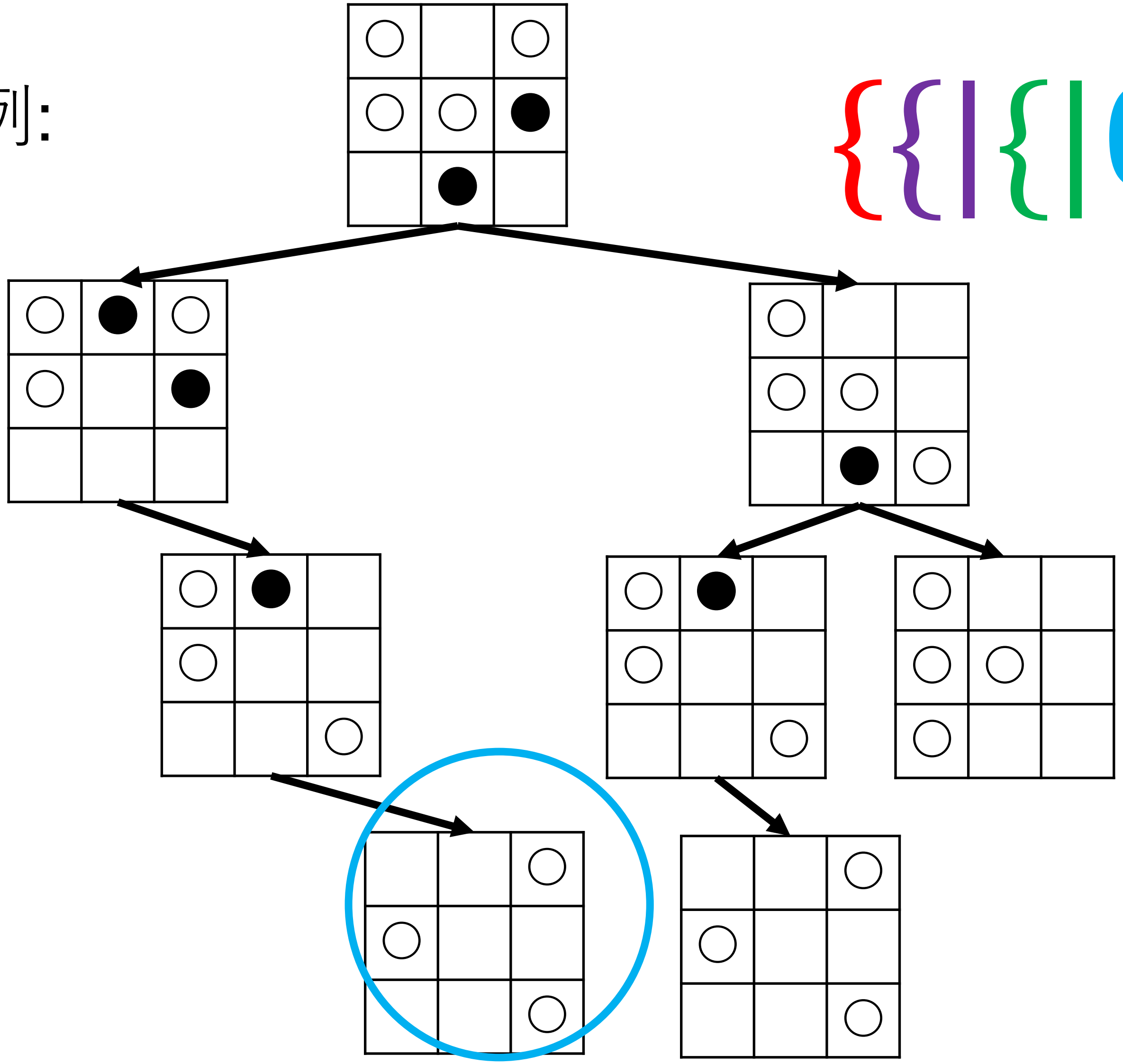
- 例:



$\{\{|\{|0\}\}|\{\{|0\}|0\}\}$

局面の再帰的定義

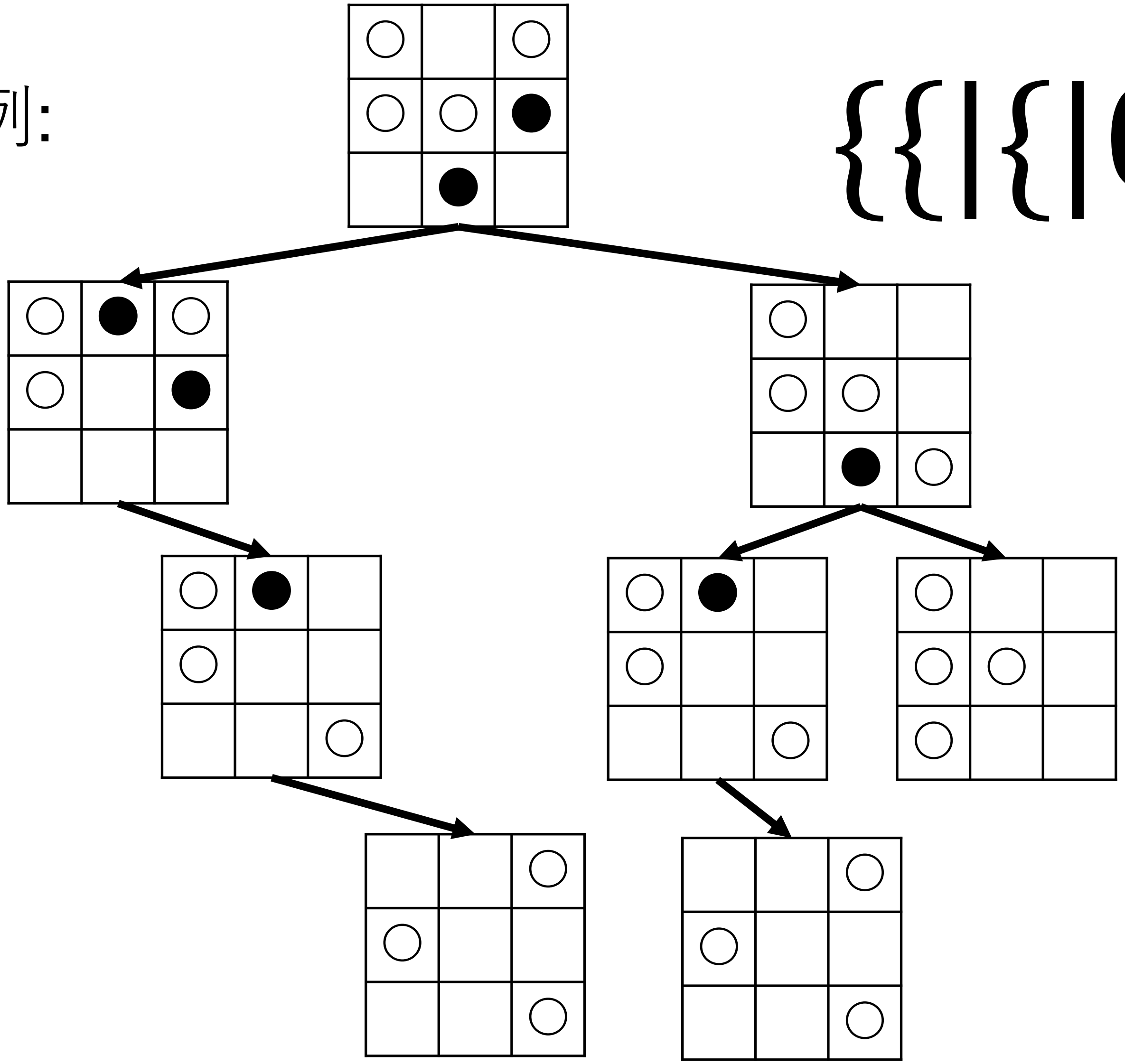
- 例:



$$\{\{\,|\,\{\,|\,0\}\}\,|\,\{\{\,|\,0\}\,|\,0\}\}$$

局面の再帰的定義

- 例:



$$\{\{\,|\,\{\,|\,0\}\}\,|\,\{\{\,|\,0\}\,|\,0\}\}$$

他の局面でも同じ木構造なら同じ形で書ける
→ゲームの抽象化

局面G, Hが同じ木構造のとき、GとHは**同型**であるといい、$G \cong H$とかく。

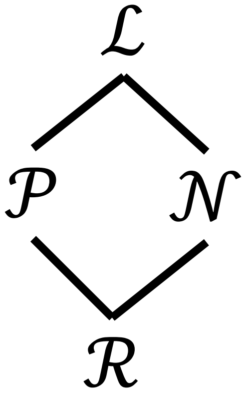
局面の帰結類

- 偶然や運の要素がなく、引き分けもないものを扱うため、局面と手番を与えると**必勝戦略を持つプレイヤーが一意に定まる。**
- 局面は4つに分類できる
  - $\mathcal{P}$：どちらが先手でも、**後手**に必勝戦略がある局面全体の集合
  - $\mathcal{R}$：先手でも後手でも、**右**に必勝戦略がある局面全体の集合
  - $\mathcal{L}$：先手でも後手でも、**左**に必勝戦略がある局面全体の集合
  - $\mathcal{N}$：どちらが先手でも、**先手**に必勝戦略がある局面全体の集合

→**与えられた局面の帰結類が分かると、嬉しい！**

局面の帰結類

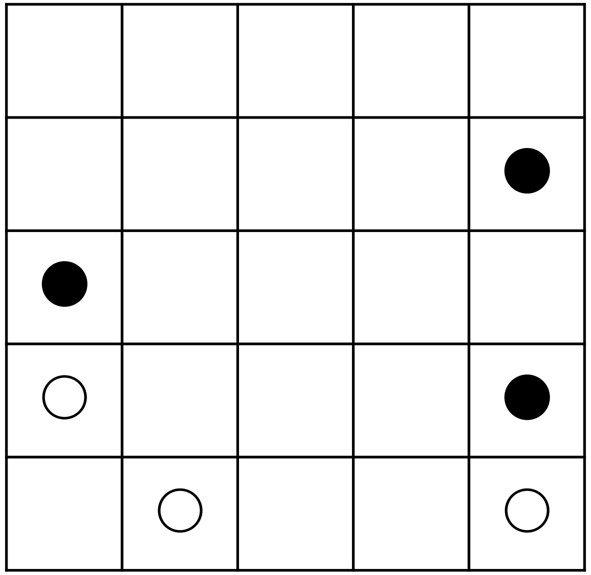
- 帰結類の定義から、次も成り立つ：
- $G \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P} \Leftrightarrow G$で左は後手で勝つことができる
- $G \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N} \Leftrightarrow G$で左は先手で勝つことができる
- $G \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P} \Leftrightarrow G$で右は後手で勝つことができる
- $G \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N} \Leftrightarrow G$で右は先手で勝つことができる



- 帰結類の大小関係を、次のように定める：

$$\mathcal{L} > \mathcal{P} > \mathcal{R}, \mathcal{L} > \mathcal{N} > \mathcal{R}, \mathcal{P} \,||\, \mathcal{N}$$

局面の直和



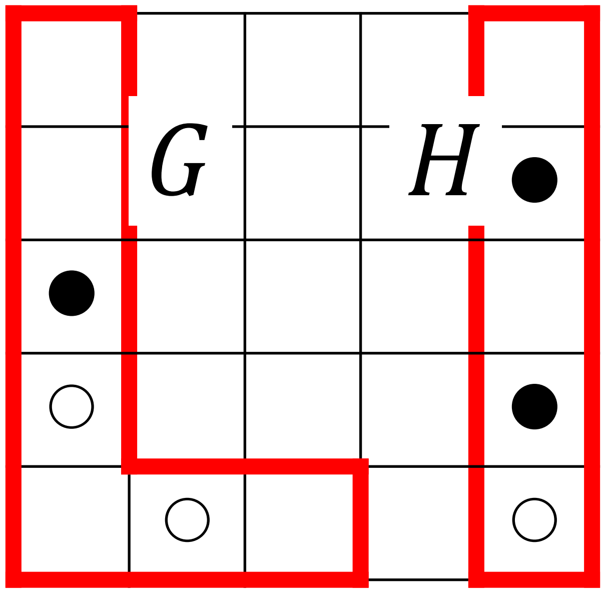
$$G \cong \left\{G_{L_1}, G_{L_2}, \dots, G_{L_n} \middle| G_{R_1}, G_{R_2}, \dots, G_{R_m}\right\},$$
$$H \cong \{H_{L_1}, H_{L_2}, \dots, H_{L_{n'}} | H_{R_1}, H_{R_2}, \dots, H_{R_{m'}}\}$$

に対し、 $G + H$ を

$$\{G_{L_1} + H, G_{L_2} + H, \dots, G_{L_n} + H, G + H_{L_1}, G + H_{L_2}, \dots, G + H_{L_{n'}},$$
$$| G_{R_1} + H, G_{R_2} + H, \dots, G_{R_m} + H, G + H_{R_1}, G + H_{R_2}, \dots, G + H_{R_{m'}}\}$$

と定義する。

局面の直和



$G + H$

$$G \cong \{G_{L_1}, G_{L_2}, \ldots, G_{L_n} | G_{R_1}, G_{R_2}, \ldots, G_{R_m}\},$$
$$H \cong \{H_{L_1}, H_{L_2}, \ldots, H_{L_{n'}} | H_{R_1}, H_{R_2}, \ldots, H_{R_{m'}}\}$$

に対し、 $G + H$ を

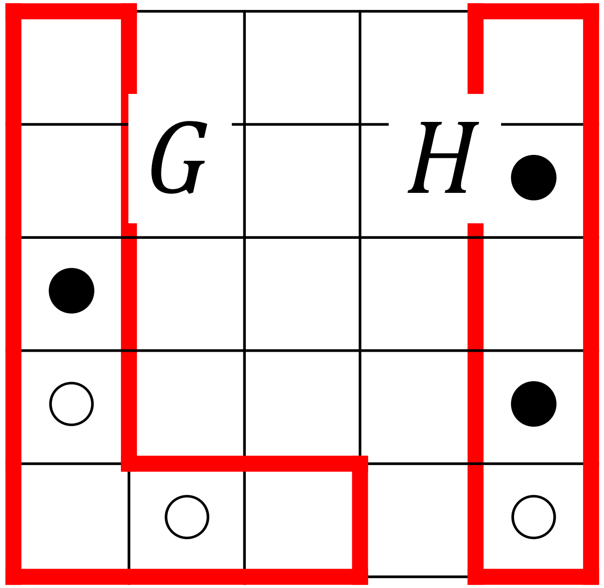
$$\{G_{L_1} + H, G_{L_2} + H, \ldots, G_{L_n} + H, G + H_{L_1}, G + H_{L_2}, \ldots, G + H_{L_{n'}},$$
$$| G_{R_1} + H, G_{R_2} + H, \ldots, G_{R_m} + H, G + H_{R_1}, G + H_{R_2}, \ldots, G + H_{R_{m'}}\}$$

と定義する。

定理

任意の局面G, H, Jについて，次が成り立つ

- $G + 0 \cong G$（零元）
- $G + H \cong H + G$（可換）
- $(G + H) + J \cong G + (H + J)$（結合則）



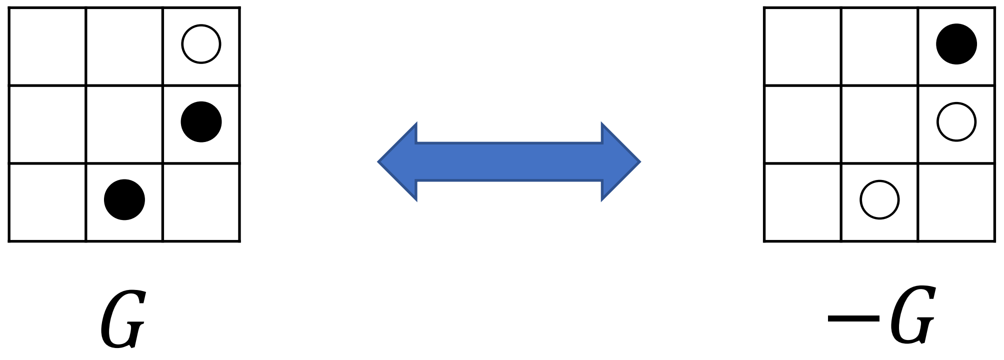
$G + H$

局面の符号

- $G \cong \left\{G_{L_1}, G_{L_2}, \dots, G_{L_n} \middle| G_{R_1}, G_{R_2}, \dots, G_{R_m}\right\}$に対して、

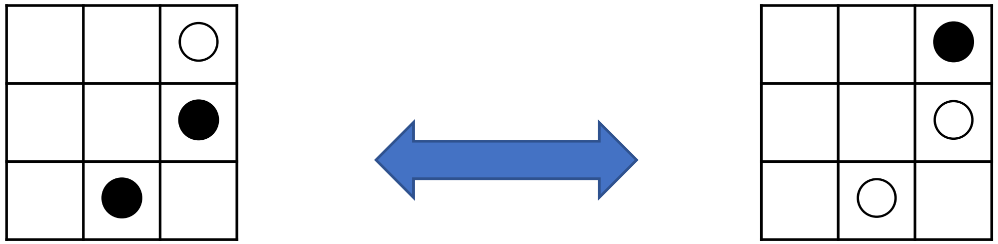
$-G \cong \left\{-G_{R_1}, -G_{R_2}, \dots, -G_{R_m} \middle| -G_{L_1}, -G_{L_2}, \dots, -G_{L_n}\right\}$と再帰的に定義する。

- $-G$は局面Gの２人のプレイヤーの役割を入れ替えた局面になる。
- $G + (-H)$を$G - H$と書くこととする。



定理

- $-(-G) \cong G$
- $-(G + H) \cong -G - H$



G $\qquad\qquad$ $-G$

局面の等価性

- 局面Gと局面Hについて、$G = H$とは、**任意の局面Xに対して、$G + X$と$H + X$の帰結類が等しいこと**であると定義する。

（これまでより緩めた等号の定義）

- **定理：**
  - $G \cong H \Longrightarrow G = H$
  - $G = 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P}$
  - $G - G = 0$
  - $G - H = 0 \Leftrightarrow G = H$

局面の等価性

直接確認は難しいが……

- 局面Gと局面Hについて、$G = H$とは、**任意の局面Xに対して、$G + X$と$H + X$の帰結類が等しいこと**であると定義する。

（これまでより緩めた等号の定義）

- **定理：**
  - $G \cong H \Longrightarrow G = H$
  - $G = 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P}$
  - $G - G = 0$
  - $G - H = 0 \Leftrightarrow G = H$

局面の等価性

直接確認は難しいが……

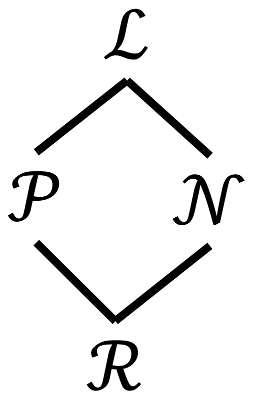
- 局面Gと局面Hについて、$G = H$とは、**任意の局面Xに対して、$G + X$と$H + X$の帰結類が等しいこと**であると定義する。

（これまでより緩めた等号の定義）

- **定理：**
  - $G \cong H \Longrightarrow G = H$
  - $G = 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P}$
  - $G - G = 0$
  - $G - H = 0 \Leftrightarrow G = H$

$G = H \Leftrightarrow G - H = 0 \Leftrightarrow G - H \in P$,
つまり、$G - H$が後手必勝かで判定できる

局面の半順序



- 局面Gの帰結類を$o(G)$とする。
- 局面G, Hが、任意の局面Xに対して、$o(G+X) \geq o(H+X)$を満たす（言い方を変えれば、**$H+X$において左が勝つときはつねに$G+X$において左が勝つ**）とき、$G \geq H$であると定義する。$\leq$も同様。

- 注：半順序は成り立つが全順序は成り立たない、すなわち**比較不能**となることもある。比較不能を表す記号として$||$を用いる。

定理

- $G \geq 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$
- $G + J \geq H + J \Leftrightarrow G \geq H$
- $G \geq H \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$

定理

- $G \geq 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$
- $G + J \geq H + J \Leftrightarrow G \geq H$
- $G \geq H \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$

$\boldsymbol{G - H}$において左が後手で勝てることが、$\boldsymbol{G \geq H}$の必要十分条件

局面の半順序

$$G > 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{L} \qquad G > H \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{L}$$

$$G = 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P} \qquad G = H \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{P}$$

$$G < 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{R} \qquad G < H \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{R}$$

$$G \parallel 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{N} \qquad G \parallel H \Leftrightarrow G - H \in \mathcal{N}$$

局面の標準形

- 等しい局面の中に、ただ１つの標準形が存在する。

- **定理：**$A = B$を満たす局面A, Bに対し、**劣位な選択肢の削除**と**打ち消し可能な選択肢の短絡**を、それぞれ可能な限り行って得られる局面をA', B'とすると、$A' \cong B'$が成り立つ。

局面の標準形

- **定理**：劣位な選択肢の削除

- $G \cong \{A, B, C, \dots | H, I, J, \dots\}$において、$B \geq A$ならば、
- $G‘ \cong \{B, C, \dots | H, I, J, \dots\}$に対して、$G = G’$となる。

- （Aは左にとって選ぶメリットのない選択肢）

局面の標準形

- **定理**：打ち消し可能な選択肢の短絡

- $G \cong \{A, B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$について、$A$のある右選択肢$A^{\mathrm{R}}$が
$G \geq A^{\mathrm{R}}$を満たすとする。
- $A^{\mathrm{R}} = \{W, X, Y, \ldots | \ldots\}$とすると$G$において$A$を$A^{\mathrm{R}}$の左選択肢で置き換えたゲーム$G'\cong \{W, X, Y, \ldots, B, C, \ldots | H, I, J, \ldots\}$について、
$G = G'$が成り立つ。

- (右にとってGがA^{R}に置き換わっていることは悪くない
- 左がAとしてきたら右はすぐA^{R}に変える着手を選べる)

局面の標準形

- 等しい局面の中に、ただ１つの標準形が存在する。
- $A = B$を満たす局面A, Bに対し、**劣位な選択肢の削除**と**打ち消し可能な選択肢の短絡**を、それぞれ可能な限り行って得られる局面をA', B'とすると、$A' \cong B'$が成り立つ。

第２部
正規形非不偏ゲームについて

後編：様々な局面の値

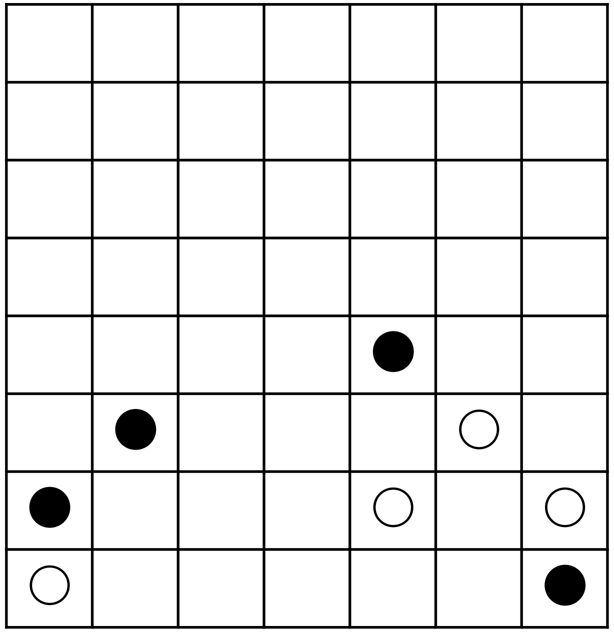
局面の値

- 不偏ゲームにおいては、すべての局面はグランディ数を持っており、同値類の集合上の計算規則（排他的論理和）を見ればよかった。
- 非不偏ゲームにおいても、同値類はまとめて考え、各局面が属する同値類を**局面の値**（**value**）と呼ぶ。局面の値の集合を$\mathbb{G} = \widetilde{\mathbb{G}}/_{=}$とする。

- 集合$\mathbb{G}$の中には２進有理数が順序保存埋め込みされ、さらに第１部で見た不偏ゲームの局面もすべて含まれる。それ以外の値も数多く存在する

局面の値(整数)

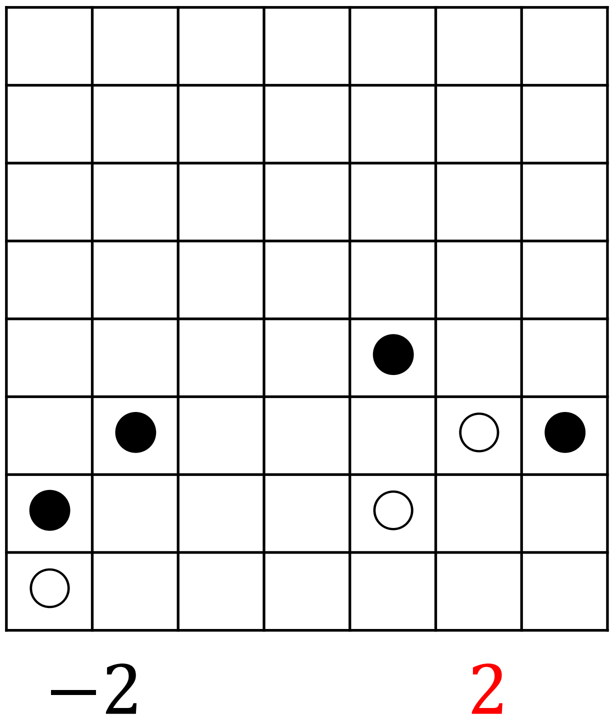
- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



-2 3

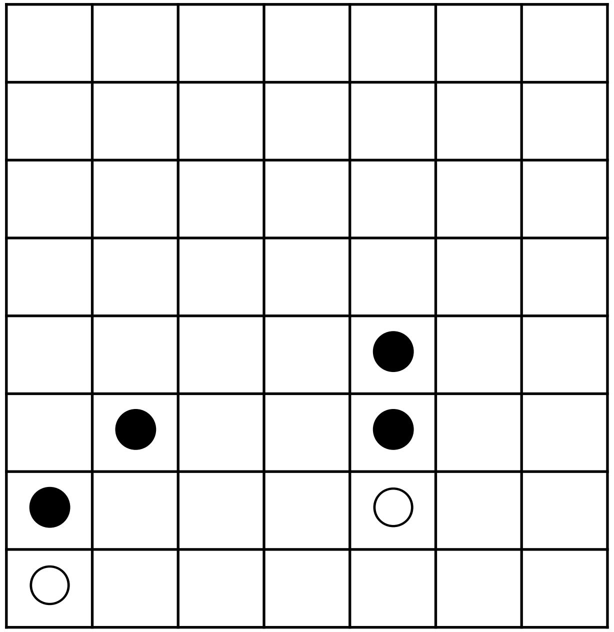
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



局面の値(整数)

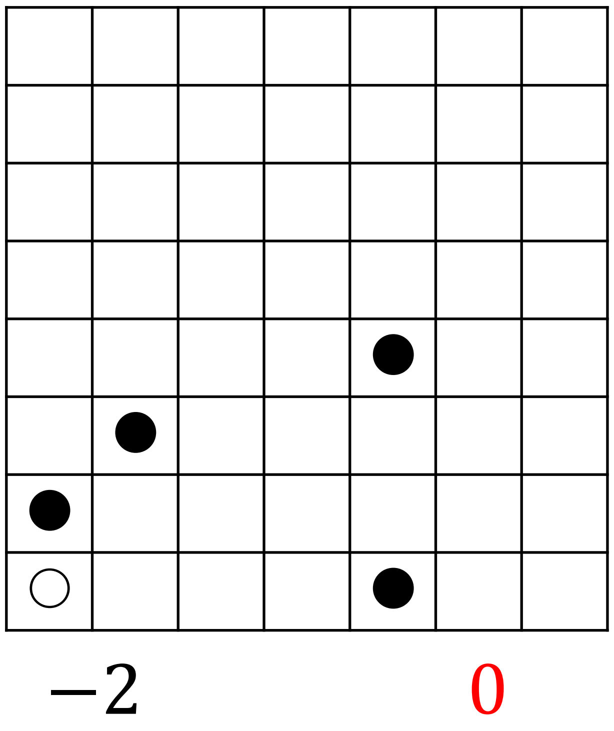
- $0 = \{|\}$
- $n = \{n - 1|\}$
- $-n = \{| -n + 1\}$



-2 1

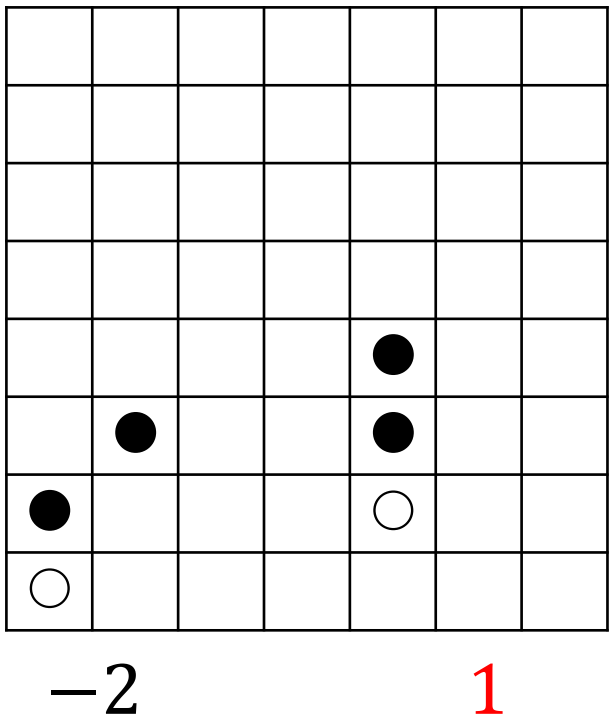
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



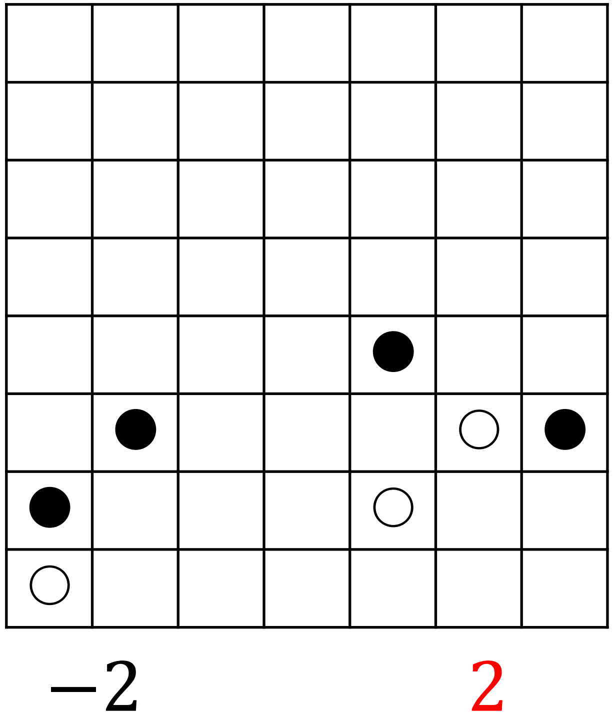
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



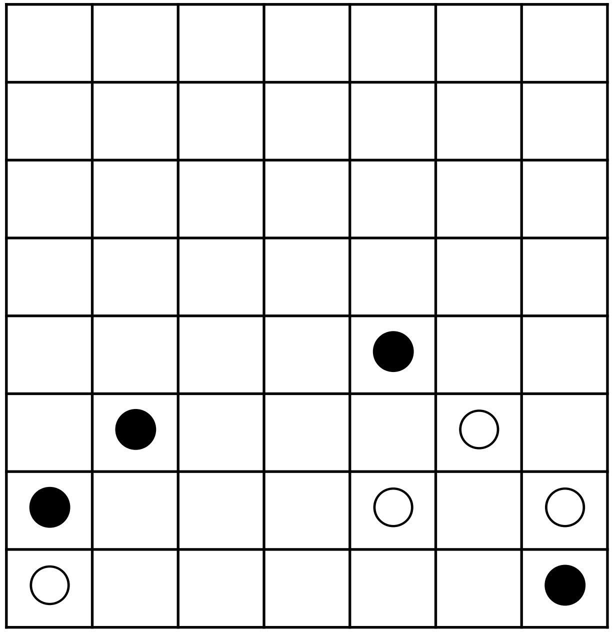
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{| -n+1\}$



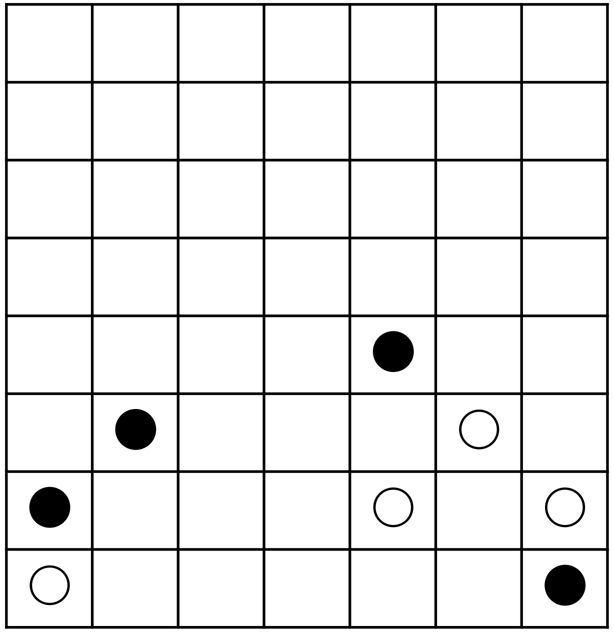
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n - 1|\}$
- $-n = \{| -n + 1\}$



局面の値(整数)

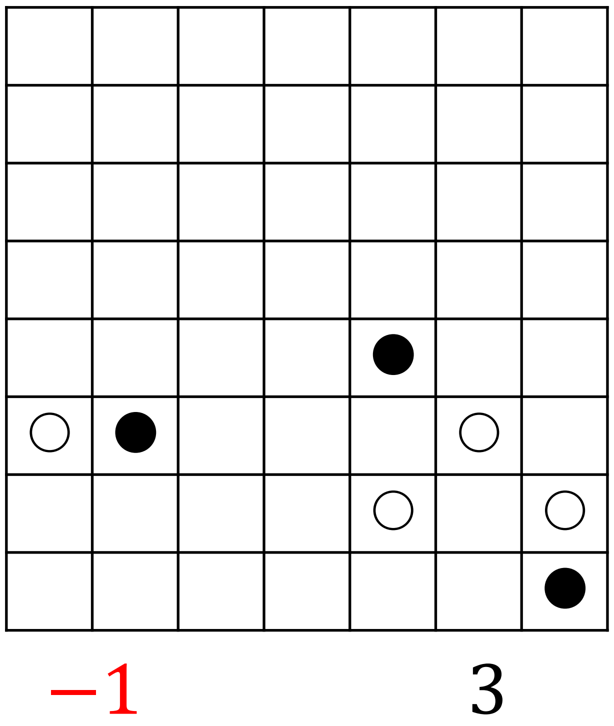
- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



-2 $\quad$ 3

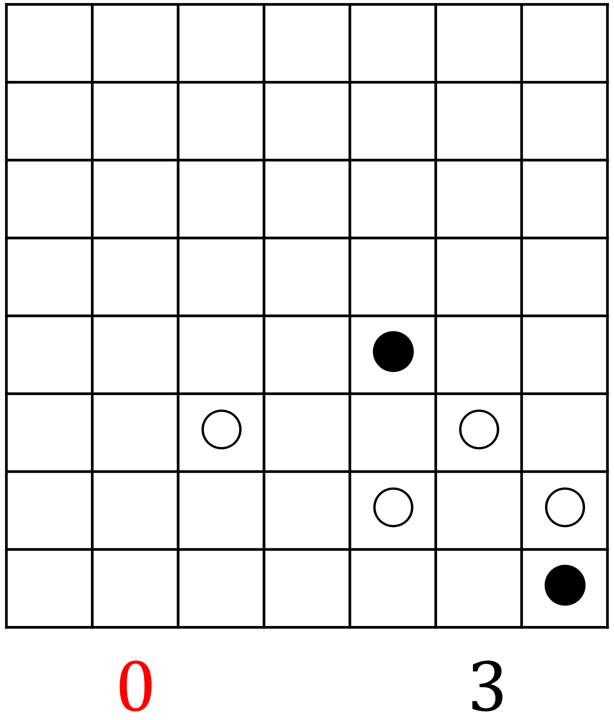
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



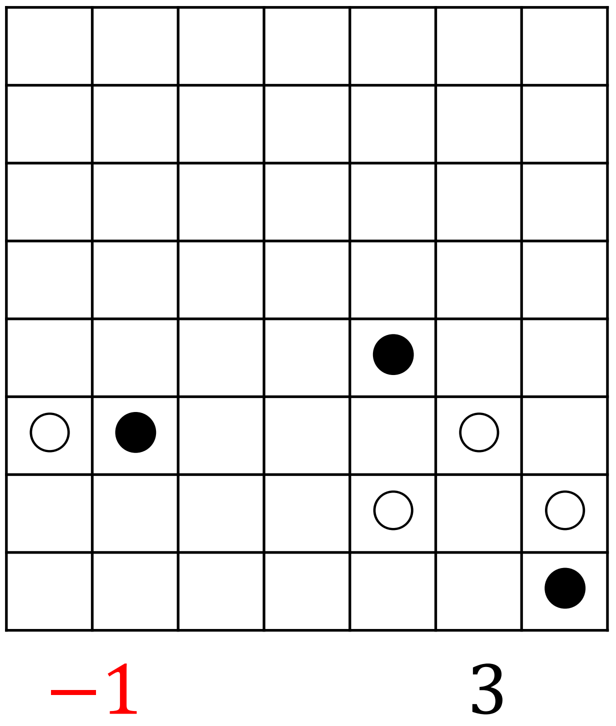
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



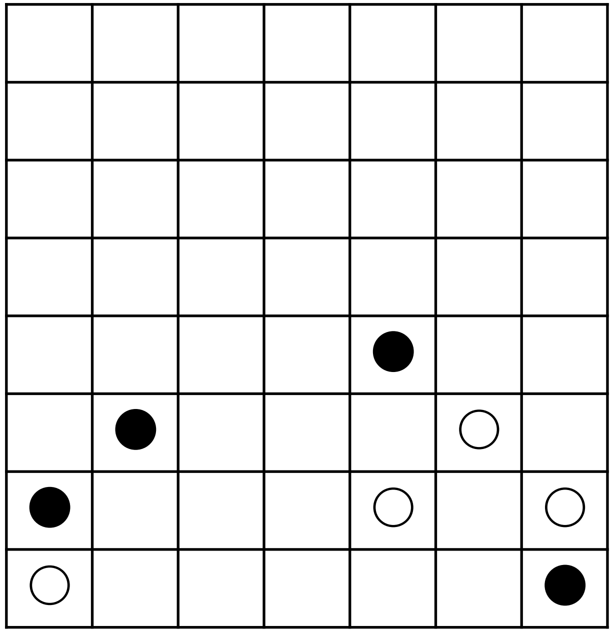
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



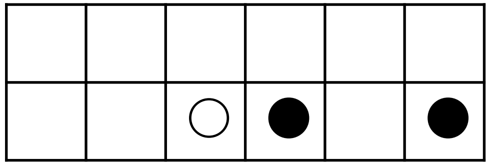
局面の値(整数)

- $0 = \{|\}$
- $n = \{n-1|\}$
- $-n = \{|-n+1\}$



-2 $\quad$ 3

局面の値(２進有理数)



$\frac{1}{2}$

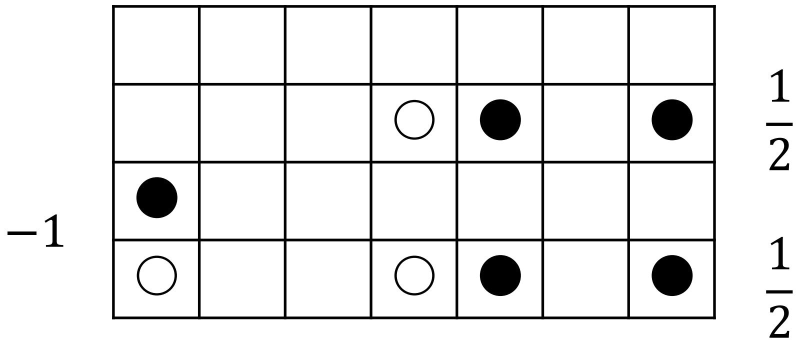
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



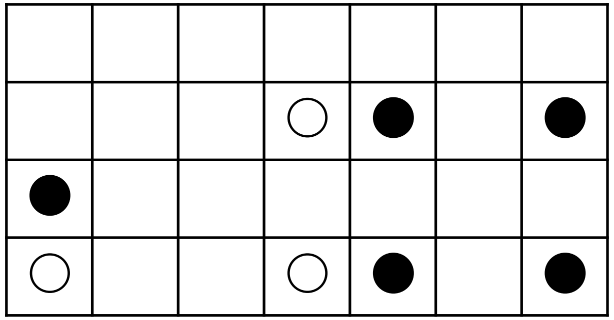
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



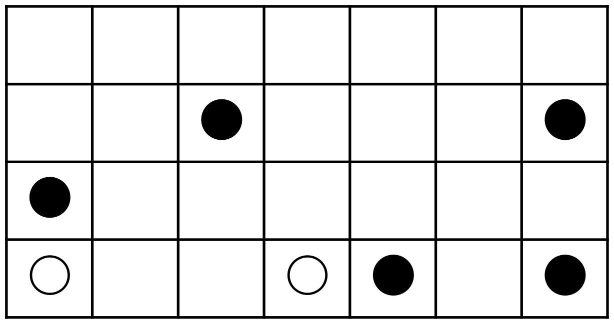
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝<u>**数としてちゃんと扱える**</u>！）。

局面の値(２進有理数)



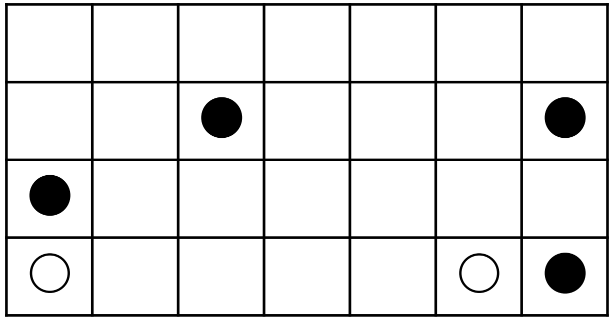
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



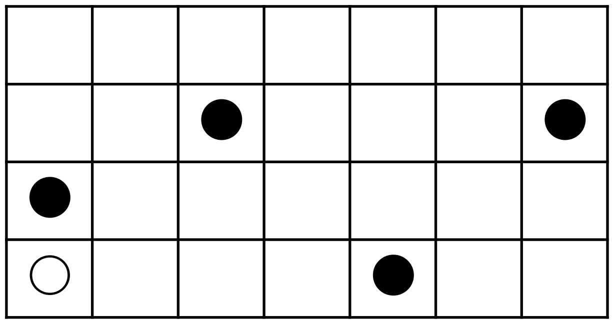
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝<u>**数としてちゃんと扱える**</u>！）。

局面の値(2進有理数)



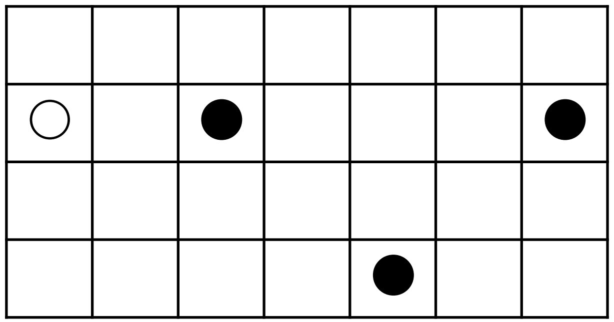
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



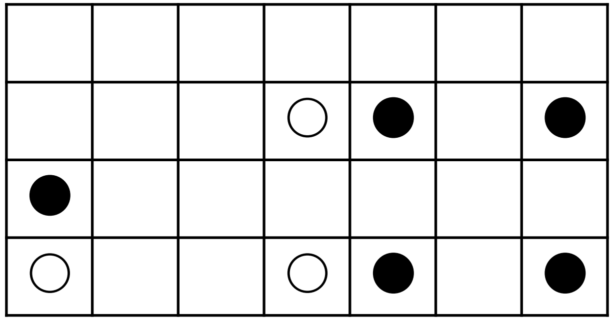
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



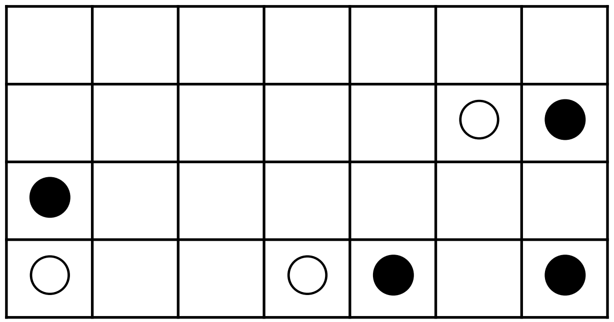
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



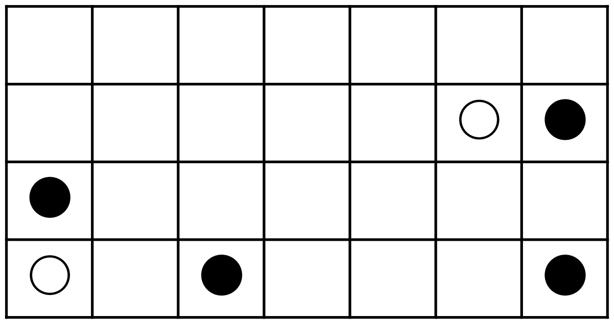
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



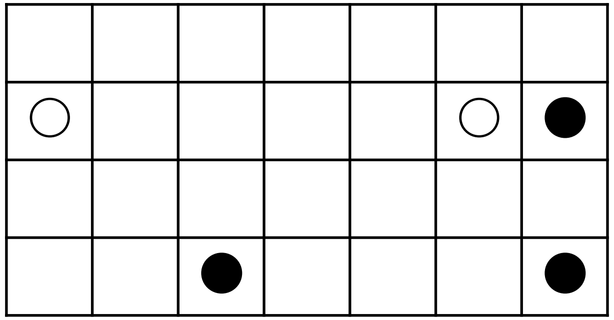
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

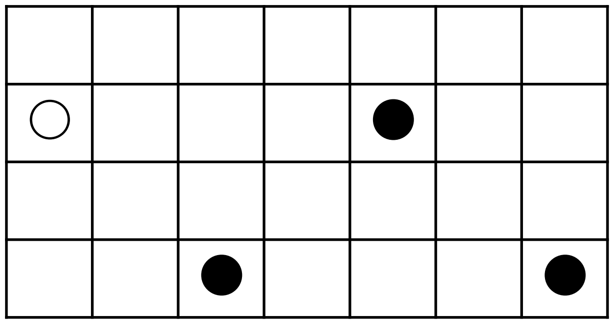
局面の値(２進有理数)



- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、
$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$
が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(2進有理数)



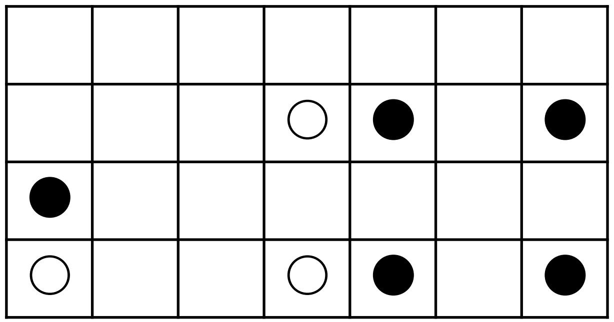
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



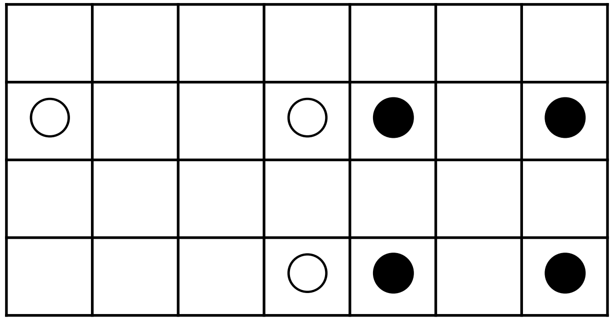
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



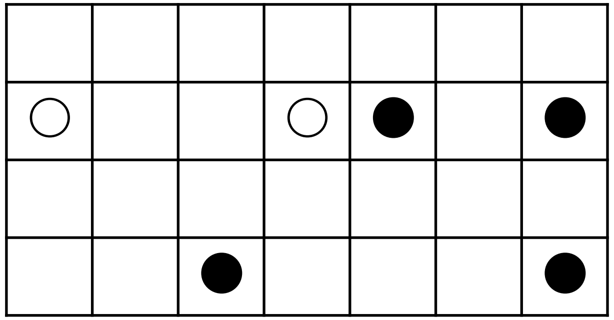
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(2 進有理数)

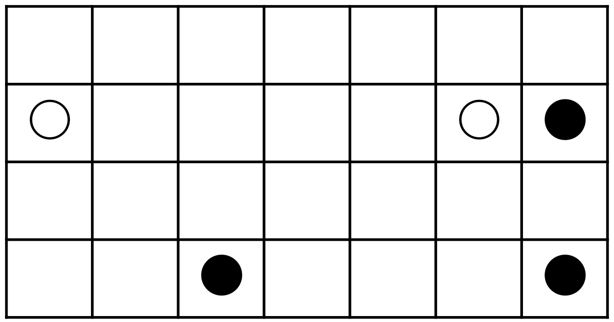


- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8}\middle|\frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{2}\right\}$
- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝**数としてちゃんと扱える**！）。

局面の値(２進有理数)



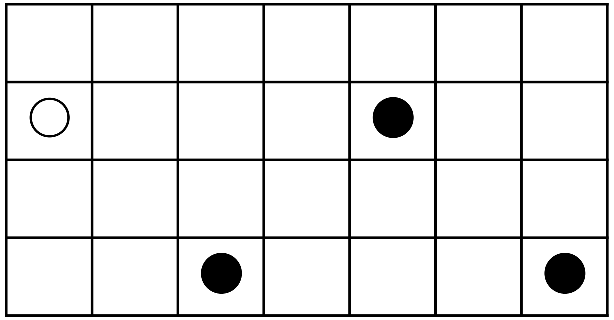
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝<u>**数としてちゃんと扱える**</u>！）。

局面の値(2進有理数)



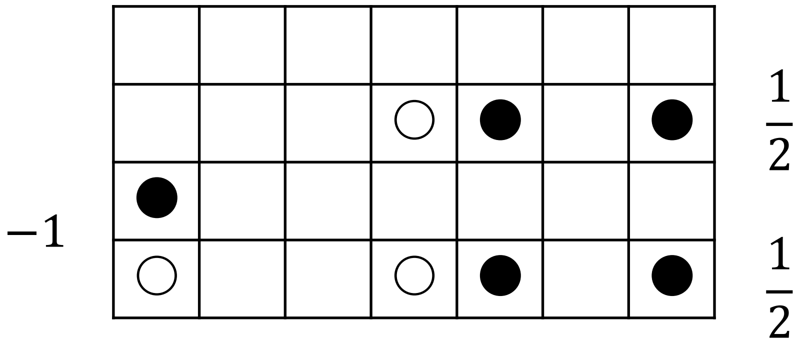
- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

が成り立つ（＝<u>**数としてちゃんと扱える**</u>！）。

局面の値(２進有理数)



- $\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j}\}$
- 例:$\frac{3}{8} = \left\{\frac{3-1}{8} \middle| \frac{3+1}{8}\right\} = \left\{\frac{1}{4} \middle| \frac{1}{2}\right\}$

- **定理**：局面A, B, Cの値が整数または有理数a, b, cのとき、

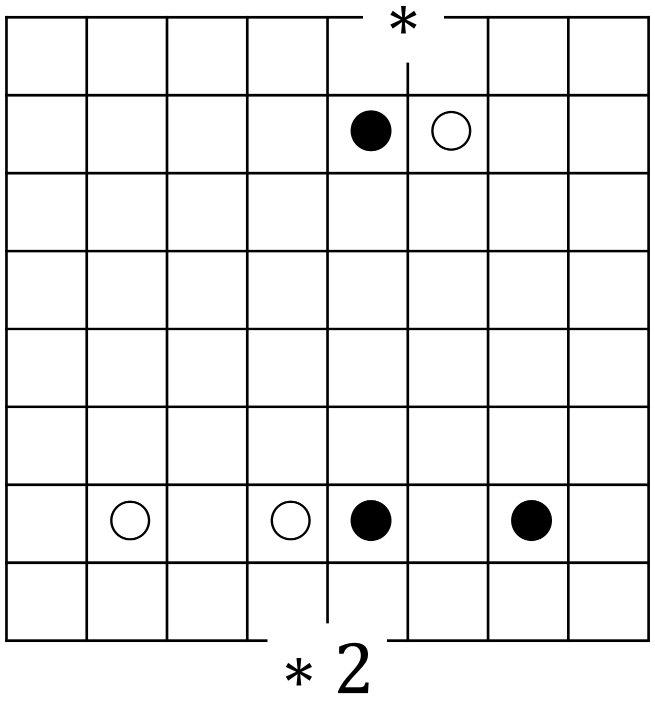
$$A + B = C \Leftrightarrow a + b = c$$
$$A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$$

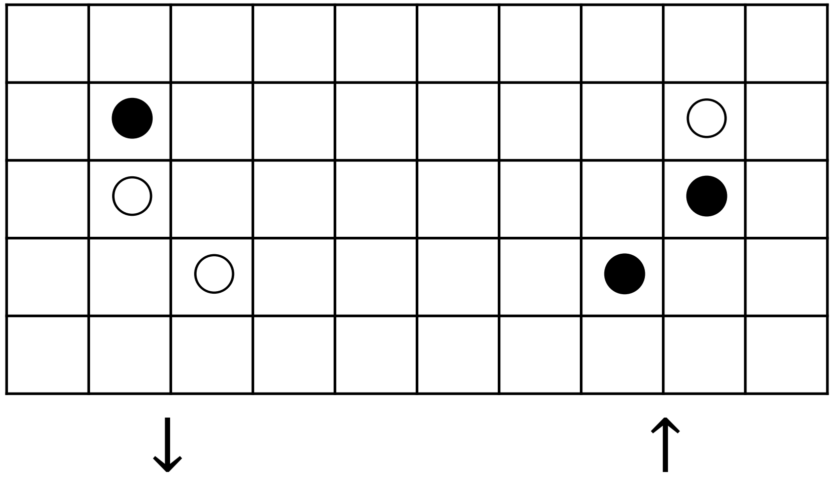
が成り立つ（＝**<u>数としてちゃんと扱える</u>**！）。

特徴的ないくつかの値

- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,*|0,*\}$,
  $\dots$,
  $*n \cong \{0,*,\dots,*(n-1)|0,*,\dots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





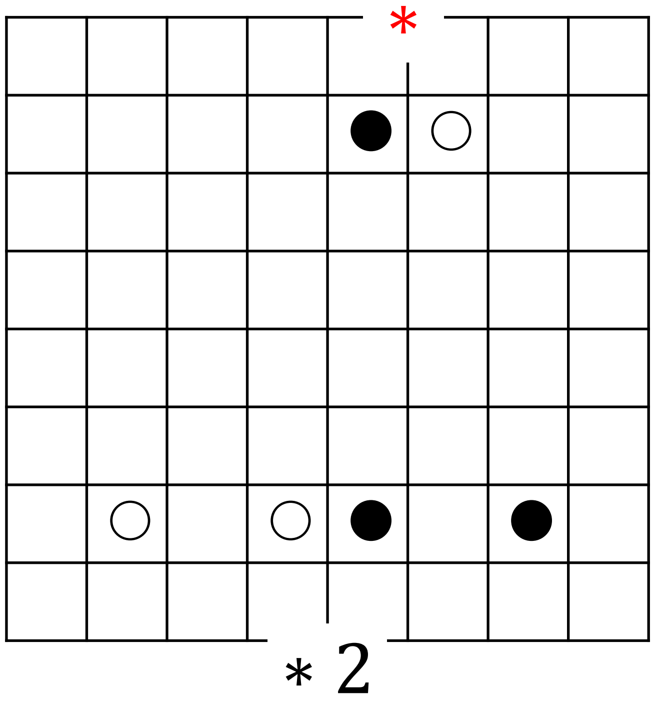
特徴的ないくつかの値

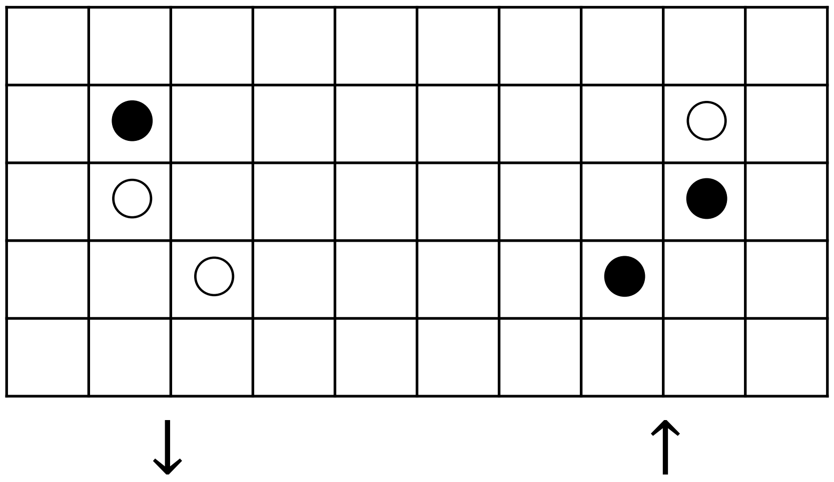
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





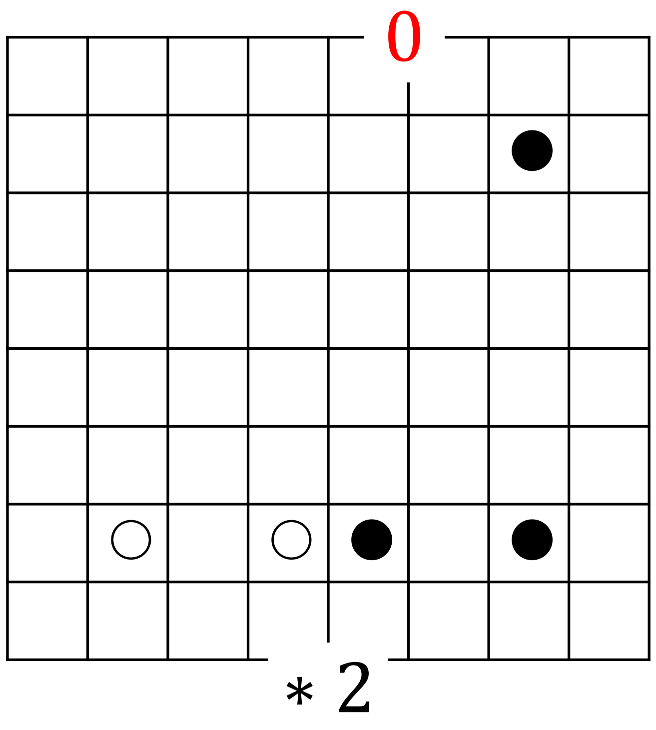
特徴的ないくつかの値

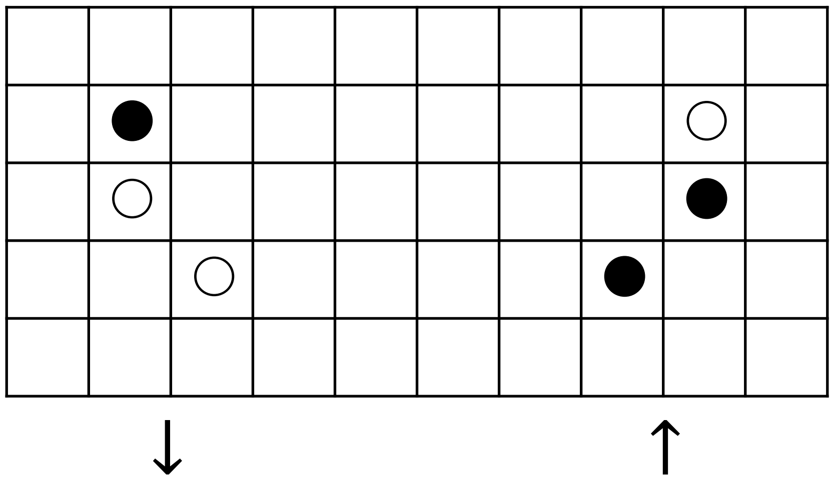
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0, * \,|\, 0, *\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0, *, \ldots, *(n-1) \,|\, 0, *, \ldots, *(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0 \,|\, *\}$
- $\downarrow \cong \{* \,|\, 0\}$





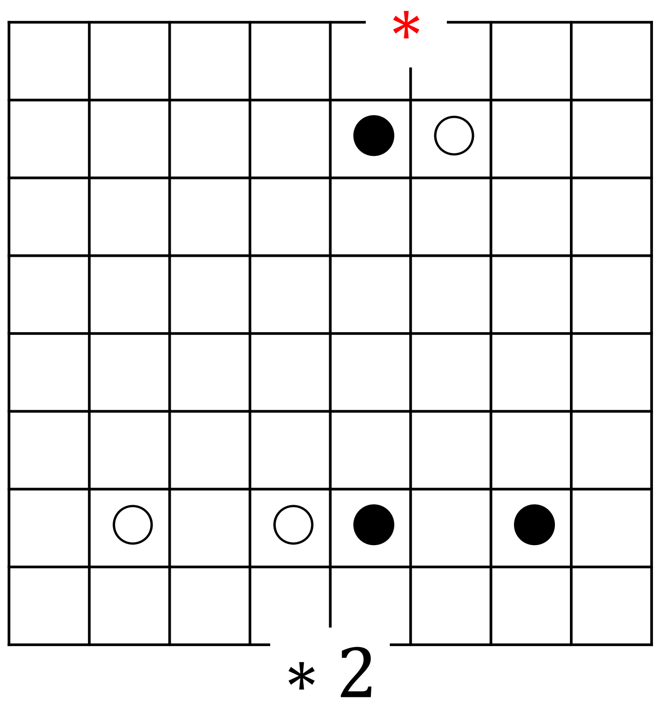
特徴的ないくつかの値

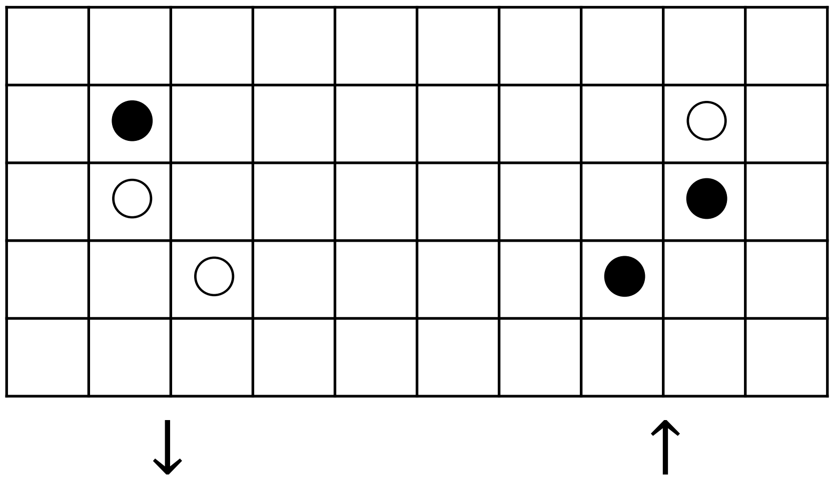
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0, * \,|\, 0, *\}$,

  $\ldots,$

  $*n \cong \{0, *, \ldots, *(n-1) \,|\, 0, *, \ldots, *(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0 \,|\, *\}$
- $\downarrow \cong \{* \,|\, 0\}$





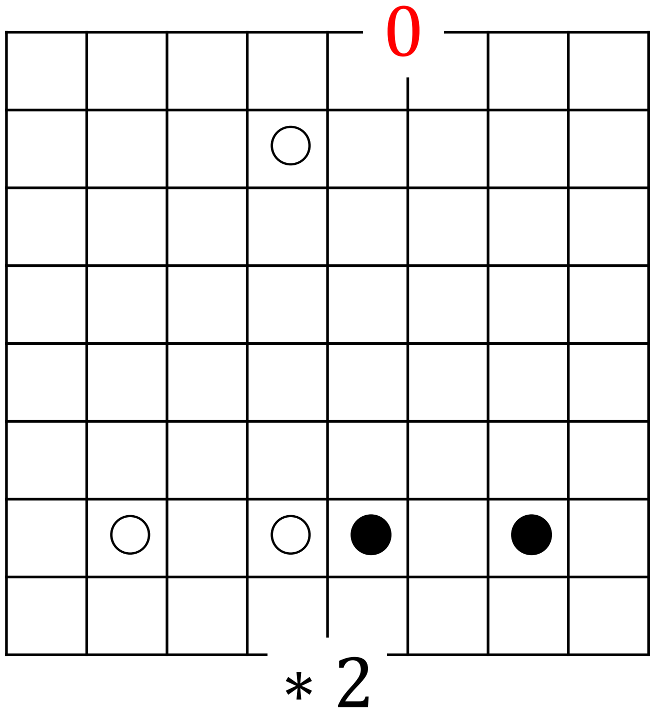
特徴的ないくつかの値

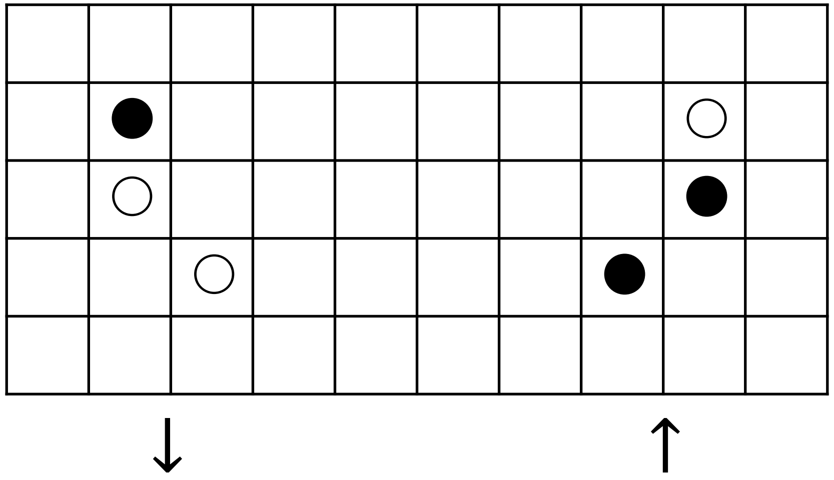
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* |0,*\}$,

  $\ldots,$

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0| *\}$
- $\downarrow \cong \{* |0\}$

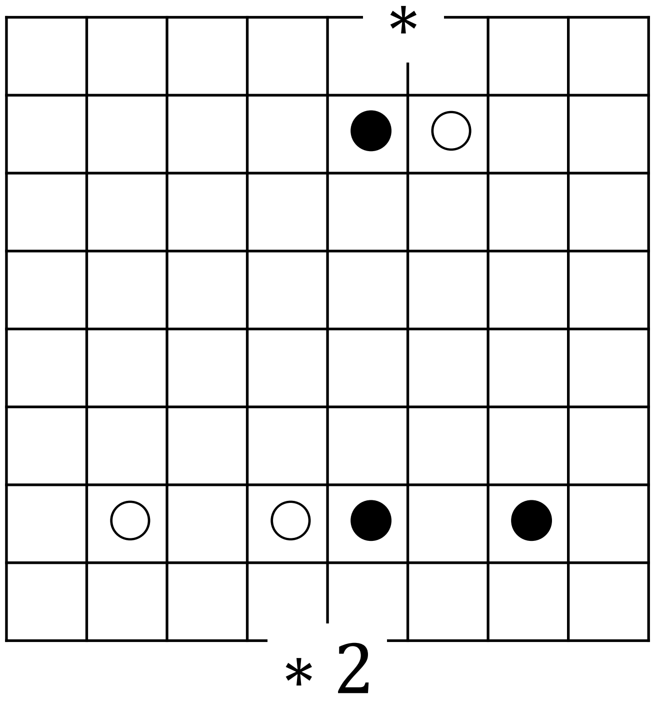


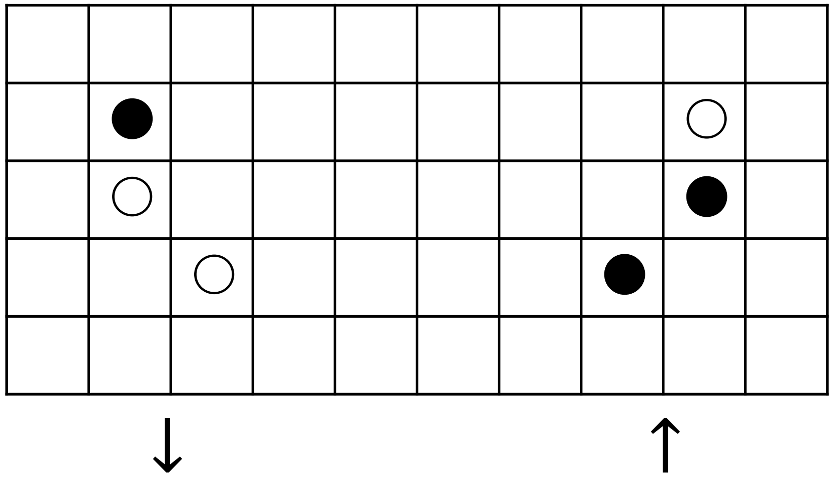


特徴的ないくつかの値

- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,*|0,*\}$,
  $\dots$,
  $*n \cong \{0,*,\dots,*(n-1)|0,*,\dots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





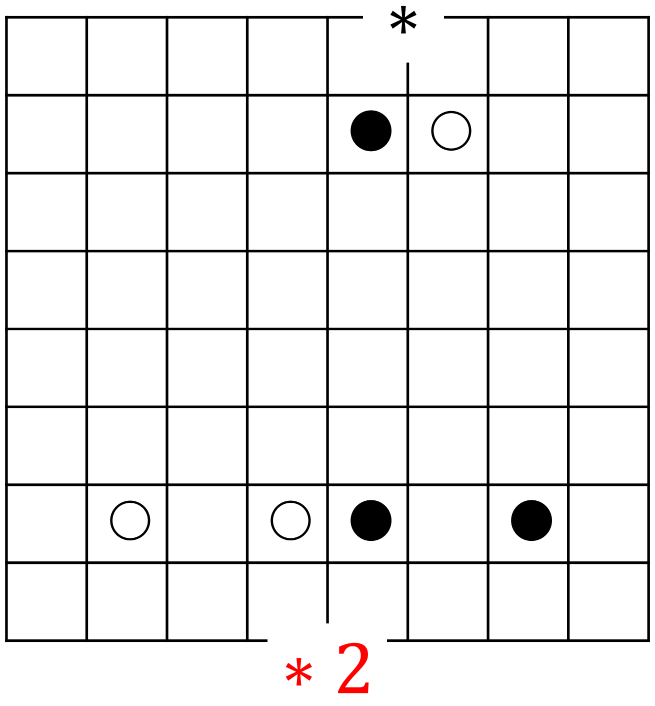
特徴的ないくつかの値

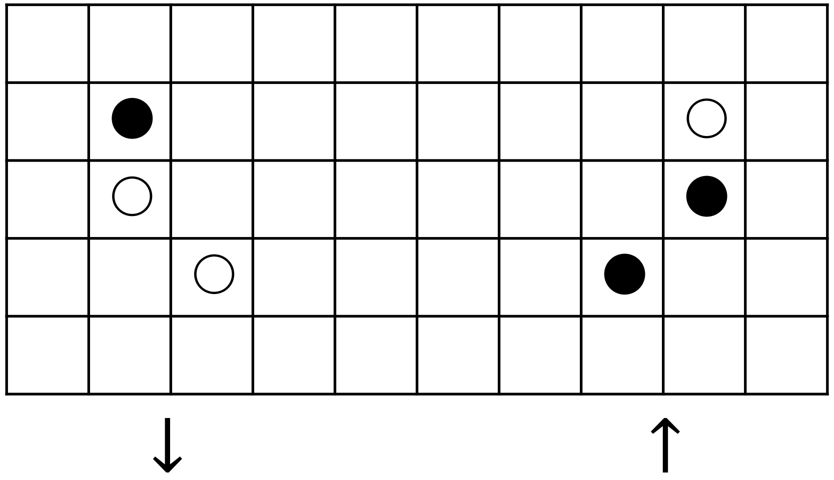
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,*|0,*\}$,

  $\dots,$

  $*n \cong \{0,*,\dots,*(n-1)|0,*,\dots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





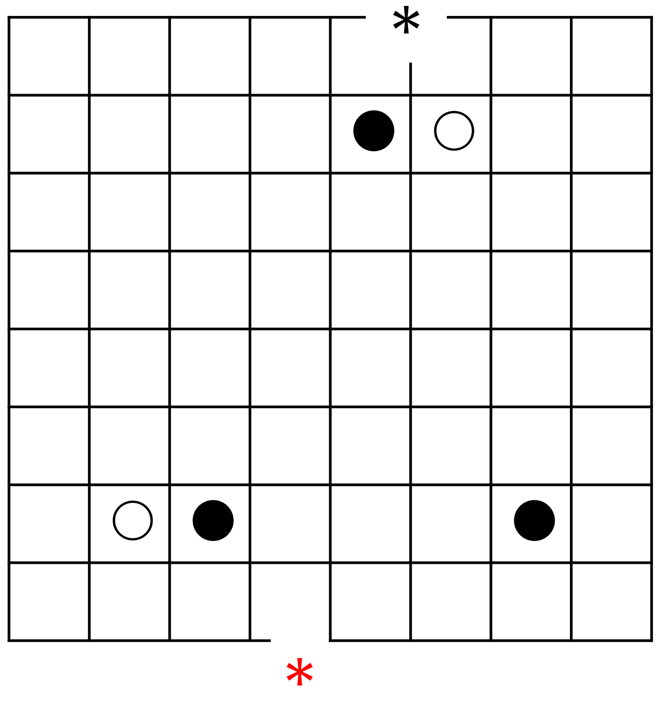
特徴的ないくつかの値

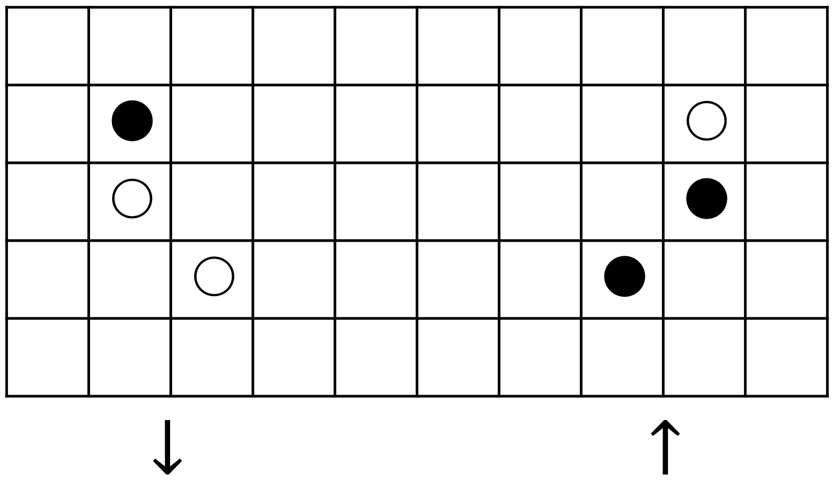
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0, * \,|\, 0, *\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0, *, \ldots, *(n-1) | 0, *, \ldots, *(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0| *\}$
- $\downarrow \cong \{* \,|0\}$



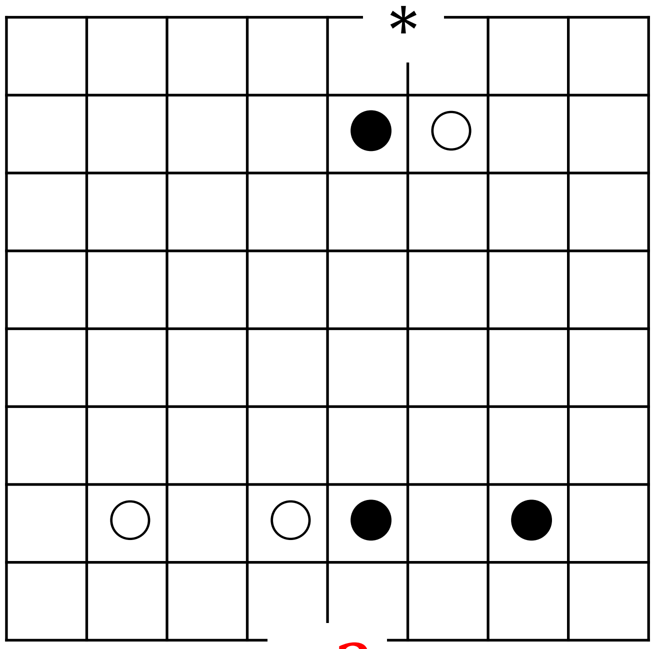


特徴的ないくつかの値

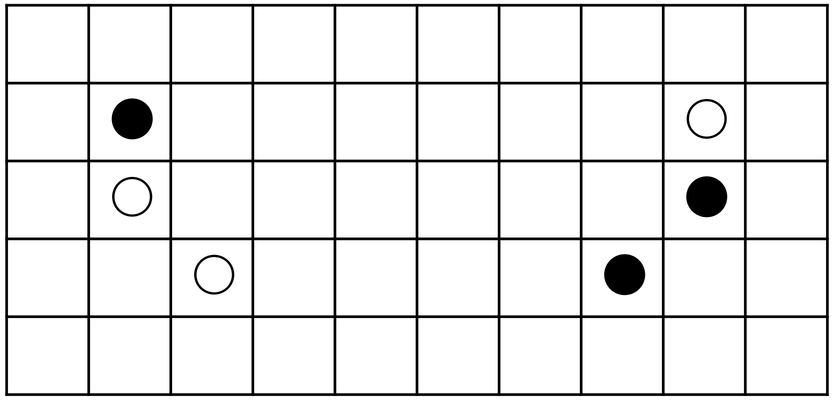
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,

  $\dots$,

  $*n \cong \{0,*,\dots,*(n-1)|0,*,\dots,*(n-1)\}$



- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$



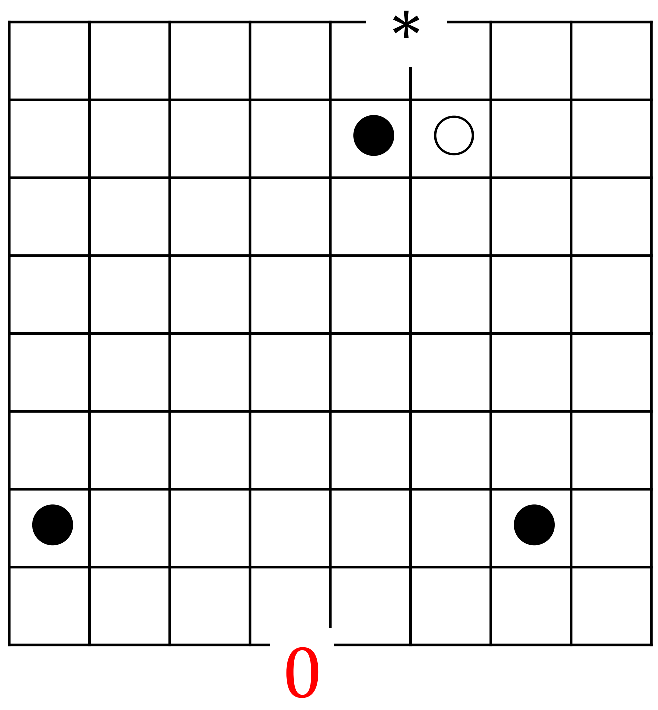
特徴的ないくつかの値

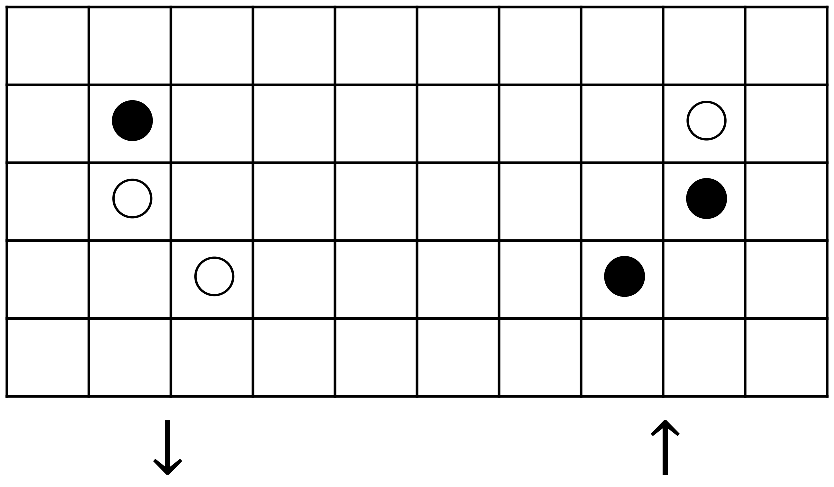
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,*|0,*\}$,

  $\ldots,$

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





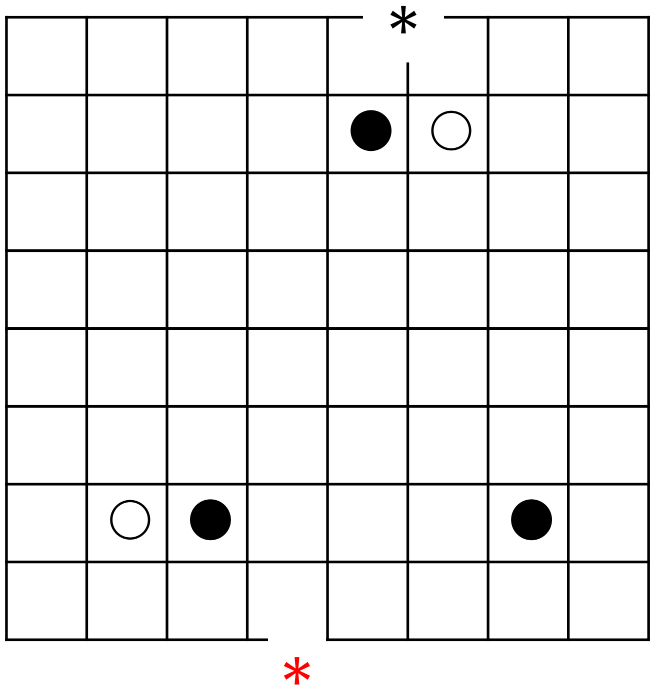
特徴的ないくつかの値

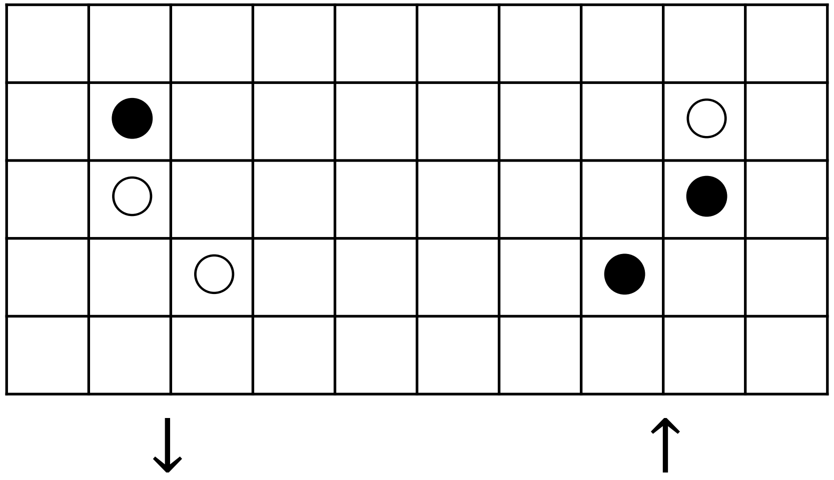
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0, * \,|\, 0, *\}$,

  $\dots$,

  $*n \cong \{0, *, \dots, *(n-1) \,|\, 0, *, \dots, *(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0 \,|\, *\}$
- $\downarrow \cong \{* \,|\, 0\}$





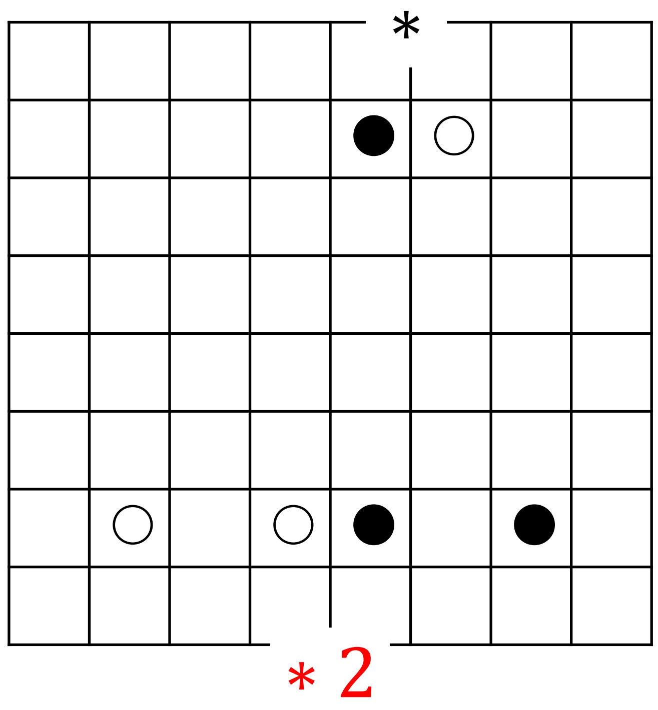
特徴的ないくつかの値

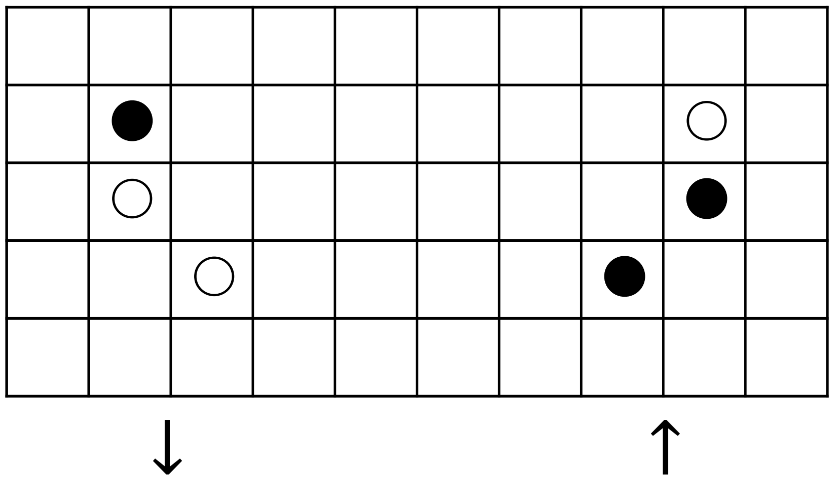
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0, * \,|\, 0, *\}$,

  $\ldots,$

  $*n \cong \{0, *, \ldots, *(n-1) | 0, *, \ldots, *(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0 | *\}$
- $\downarrow \cong \{* | 0\}$





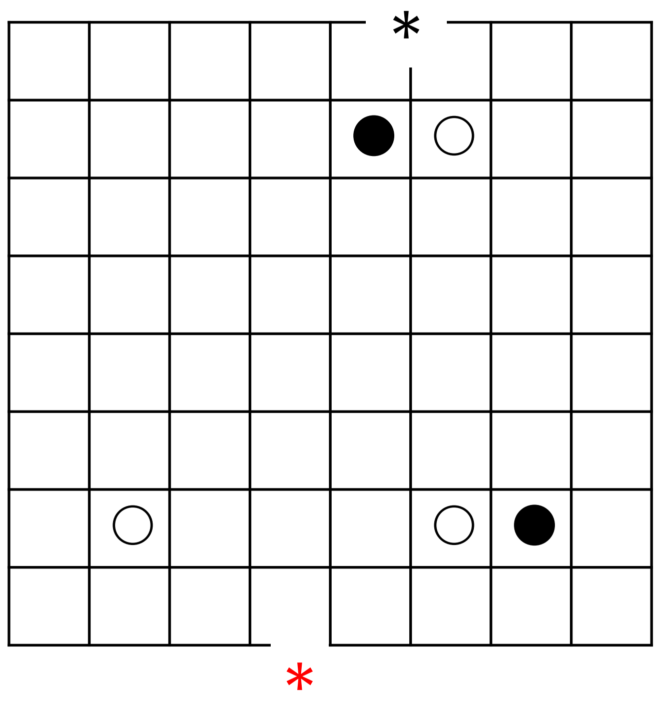
特徴的ないくつかの値

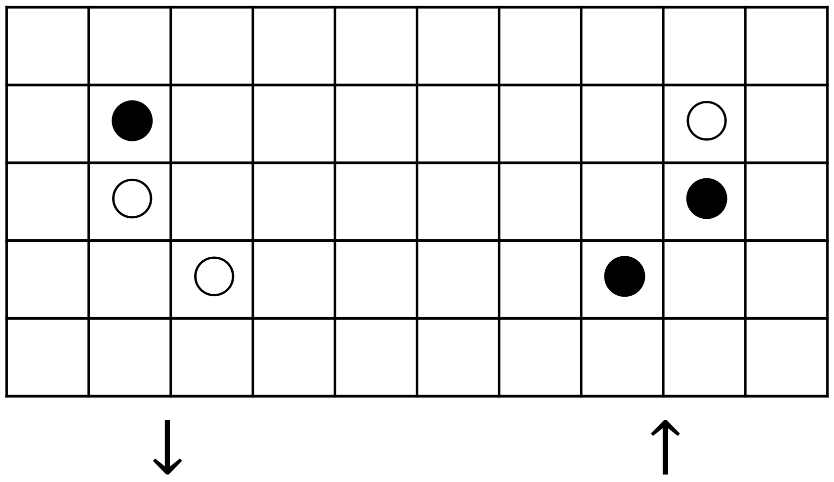
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,

  $\dots$,

  $*n \cong \{0,*,\dots,*(n-1)|0,*,\dots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





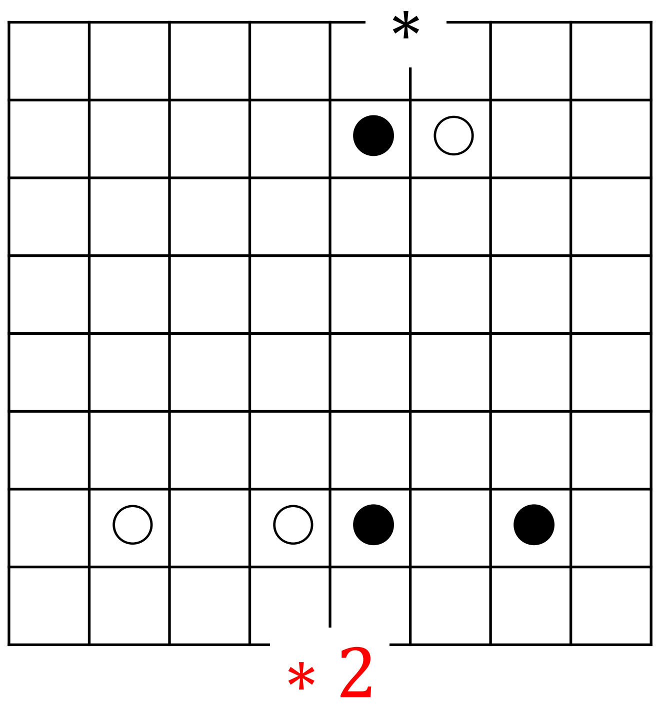
特徴的ないくつかの値

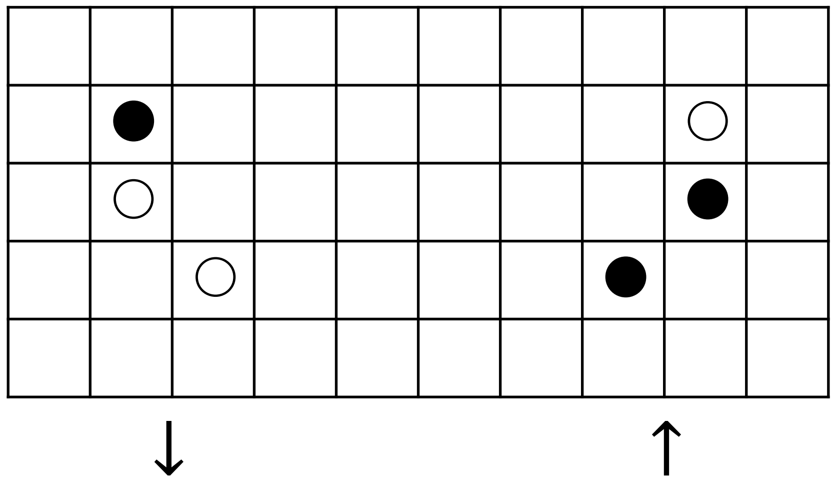
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,

  $\dots,$

  $*n \cong \{0,*,\dots,*(n-1)|0,*,\dots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|\,*\}$
- $\downarrow \cong \{*\,|0\}$

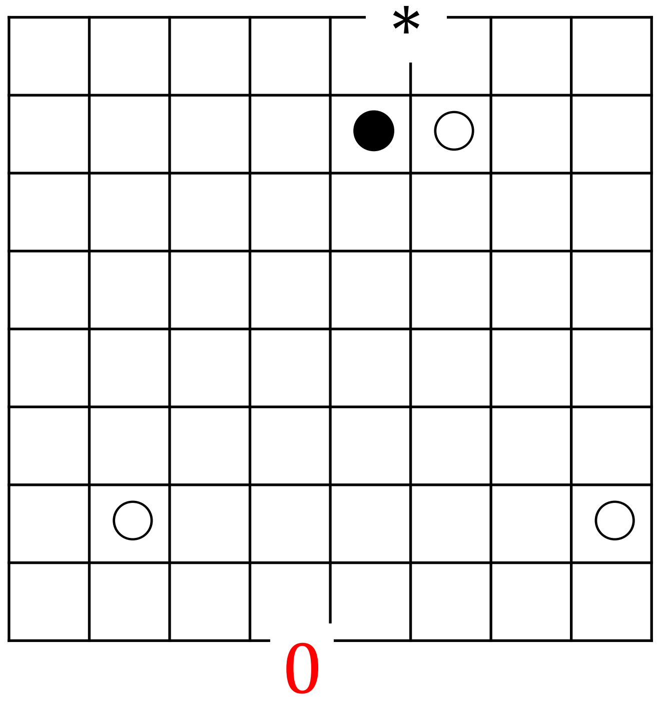


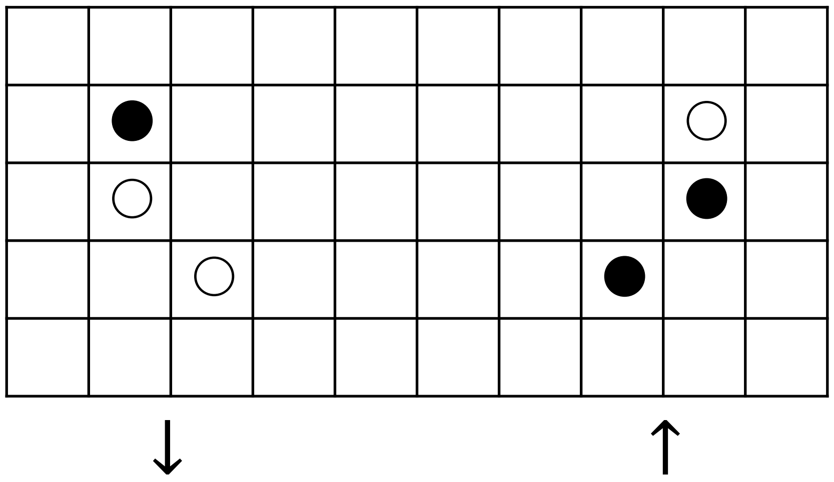


特徴的ないくつかの値

- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,
  $\dots$,
  $*n \cong \{0,*,\dots,*(n-1)|0,*,\dots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*\,|0\}$





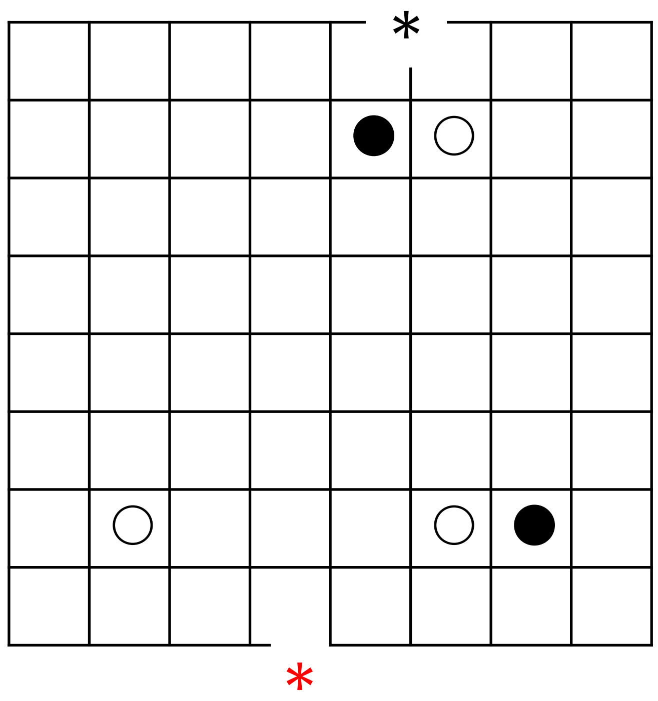
特徴的ないくつかの値

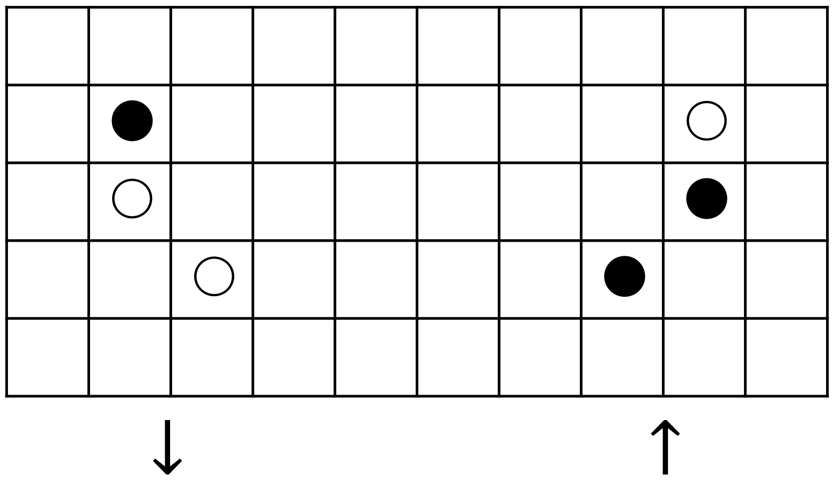
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,*|0,*\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





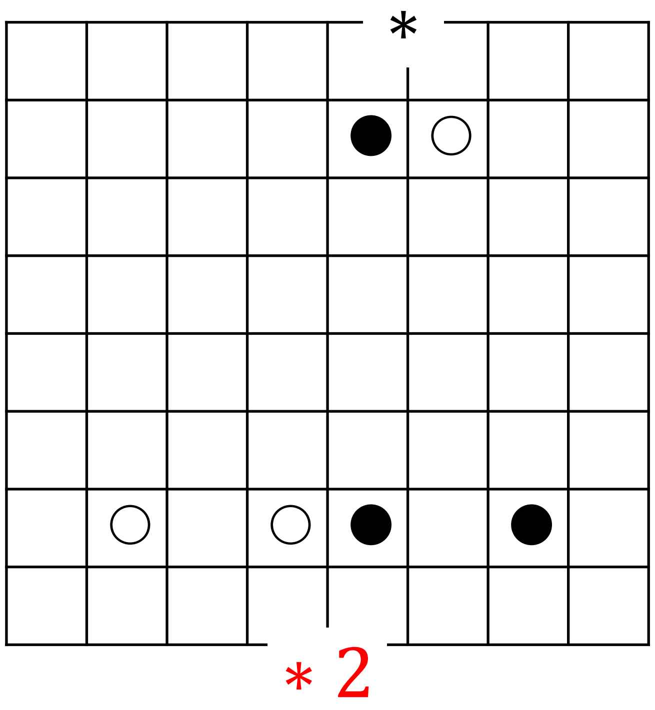
特徴的ないくつかの値

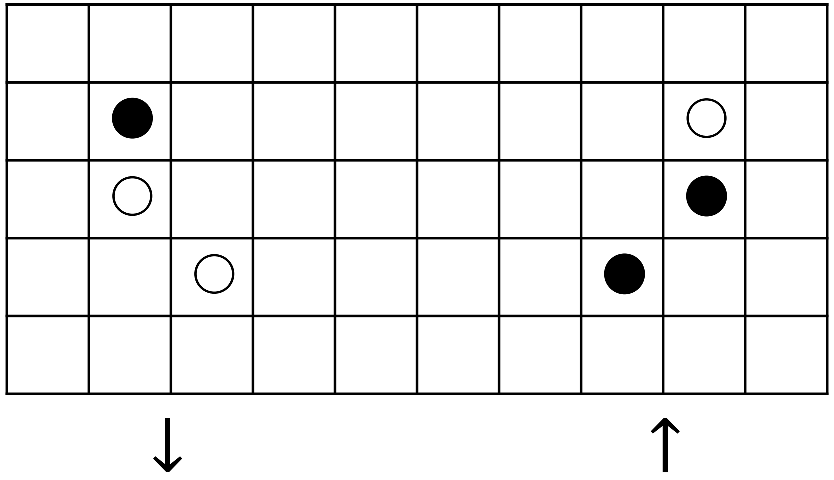
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,*|0,*\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$

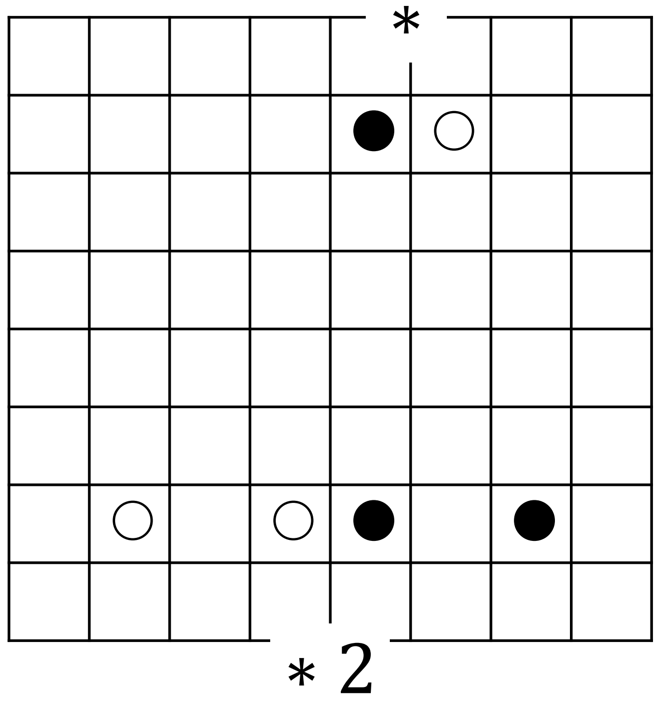


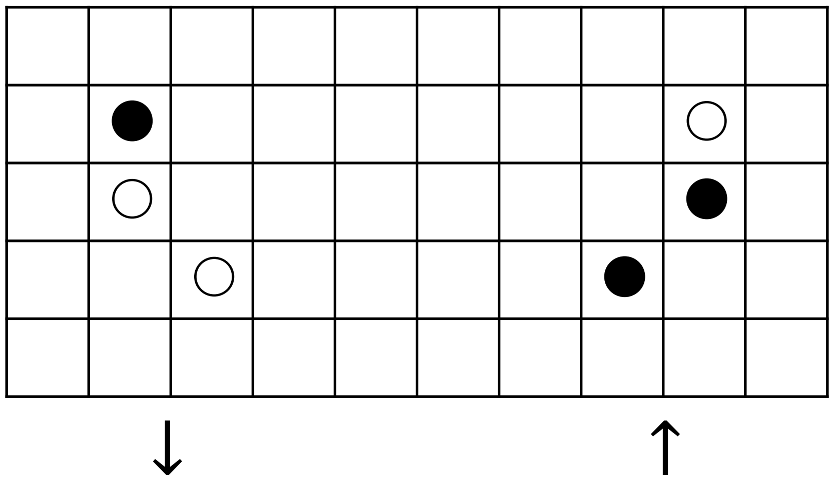


特徴的ないくつかの値

- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,
  $\ldots$,
  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|\,*\}$
- $\downarrow \cong \{*\,|0\}$



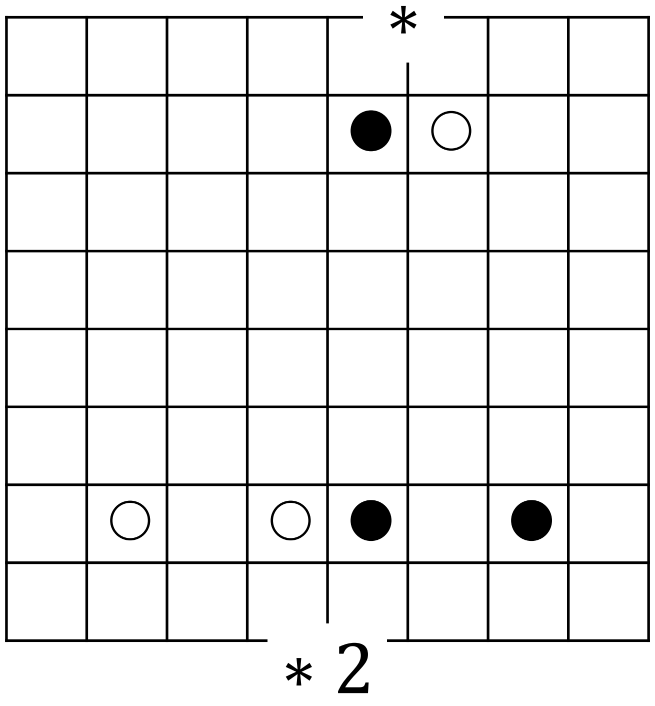


特徴的ないくつかの値

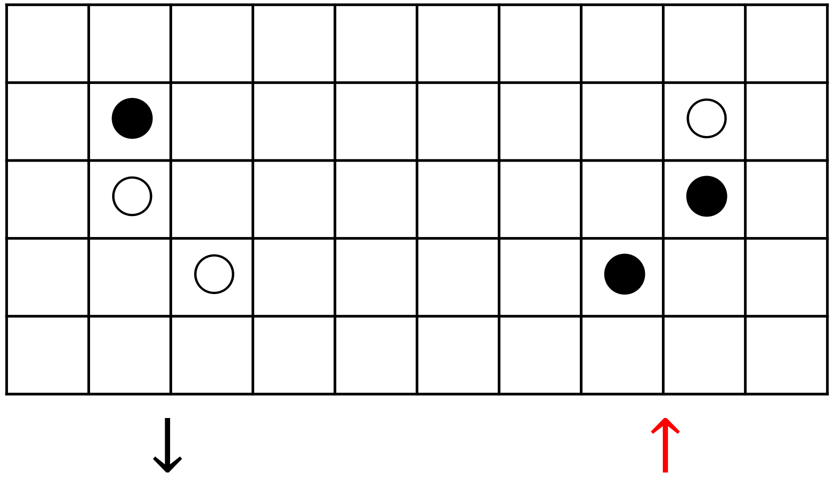
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$



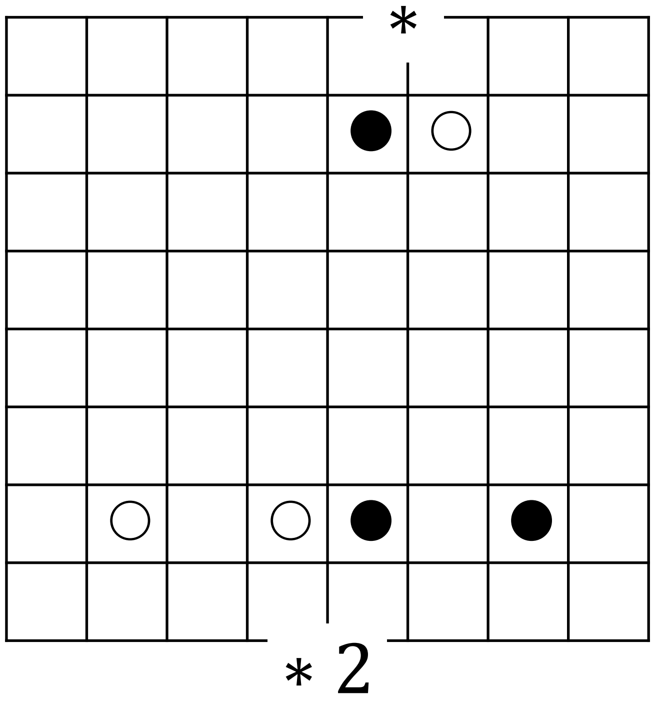
- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$

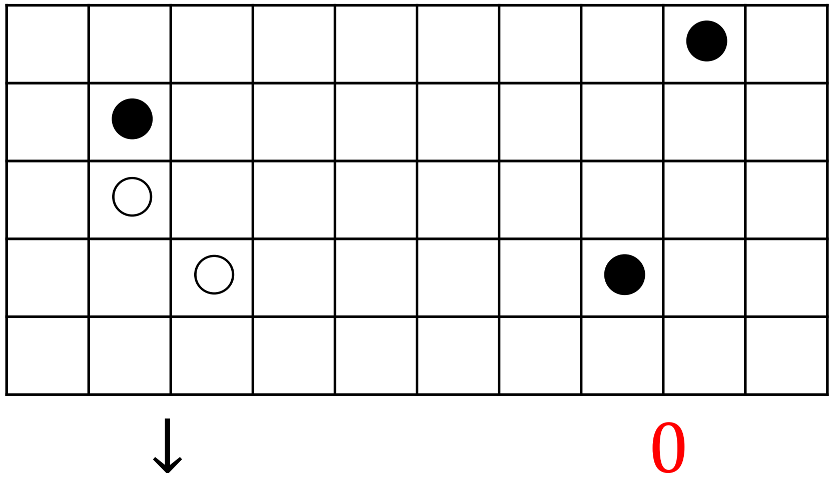


特徴的ないくつかの値

- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,
  $\ldots$,
  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|*\}$
- $\downarrow \cong \{*|0\}$





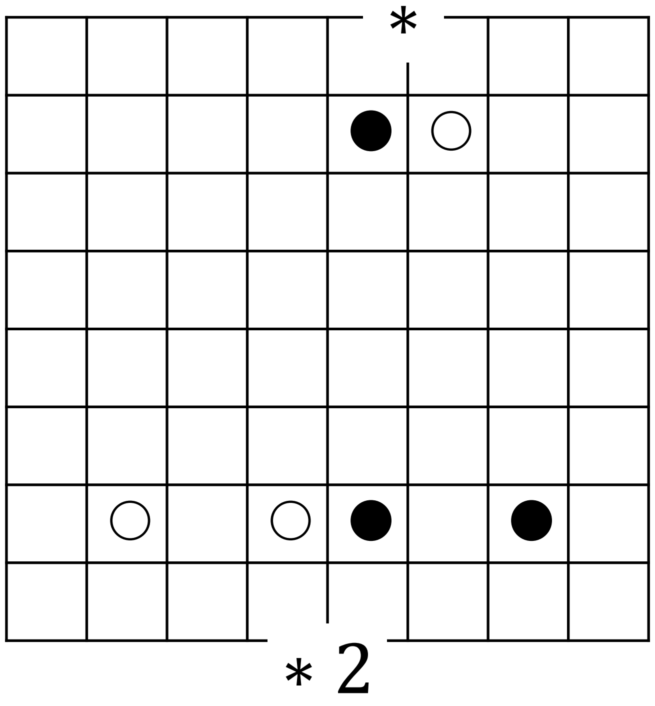
特徴的ないくつかの値

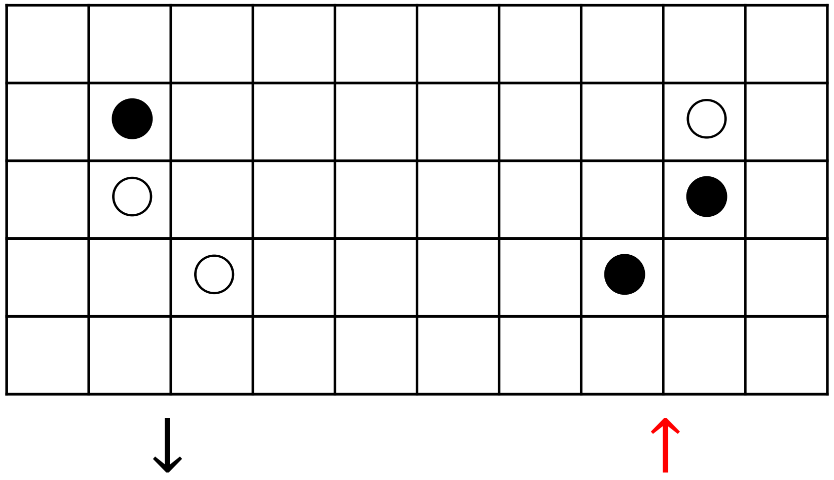
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0, * | 0, *\}$,

  $\ldots,$

  $*n \cong \{0, *, \ldots, *(n-1) | 0, *, \ldots, *(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0| *\}$
- $\downarrow \cong \{* |0\}$





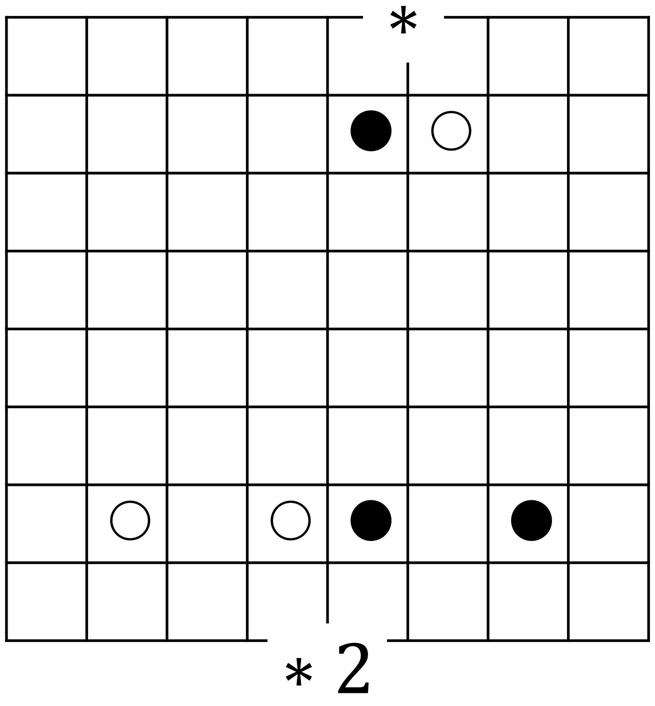
特徴的ないくつかの値

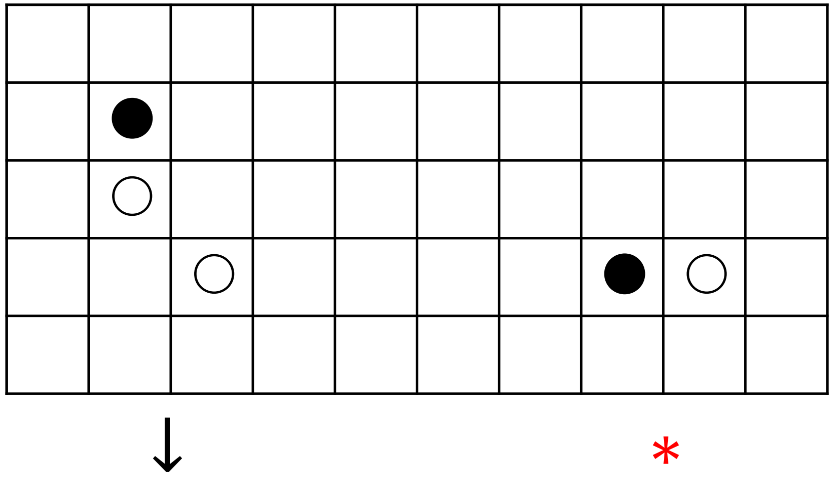
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \mid 0,*\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1) \mid 0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0 \mid *\}$
- $\downarrow \cong \{* \mid 0\}$





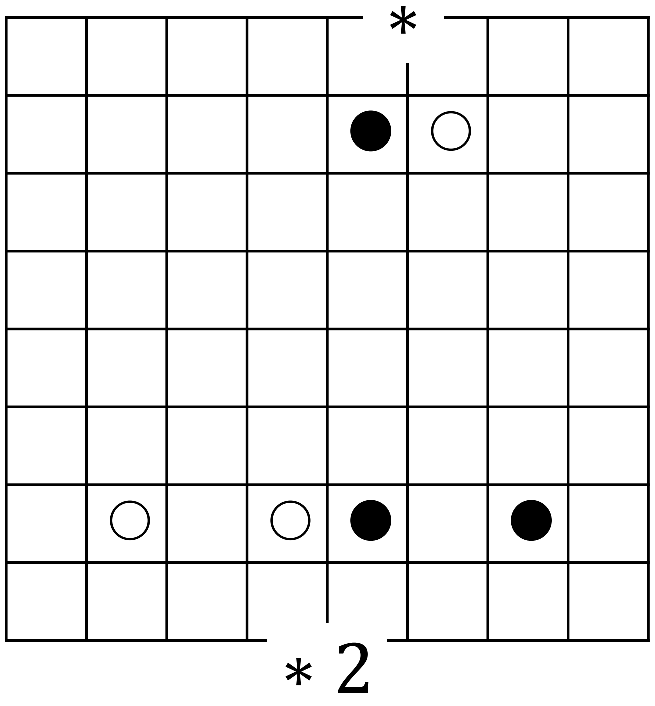
特徴的ないくつかの値

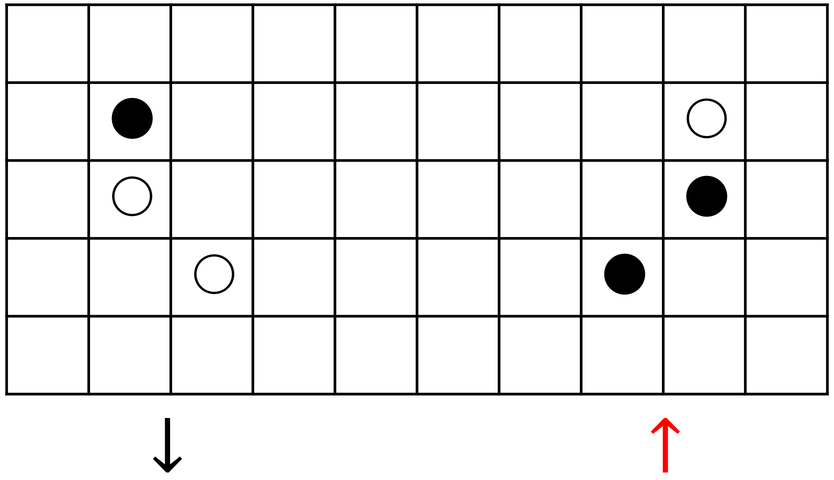
- $* \cong \{0|0\}$
- $*2 \cong \{0,* \,|0,*\}$,

  $\ldots$,

  $*n \cong \{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\}$

- $\uparrow \cong \{0|\,*\}$
- $\downarrow \cong \{*\,|0\}$





特徴的ないくつかの値

- $0 || *k$
- 任意の正の数xに対して$-x <* k < x, *k + *k = 0$
- $*k$は石がk個ある一山のニムの局面と同値

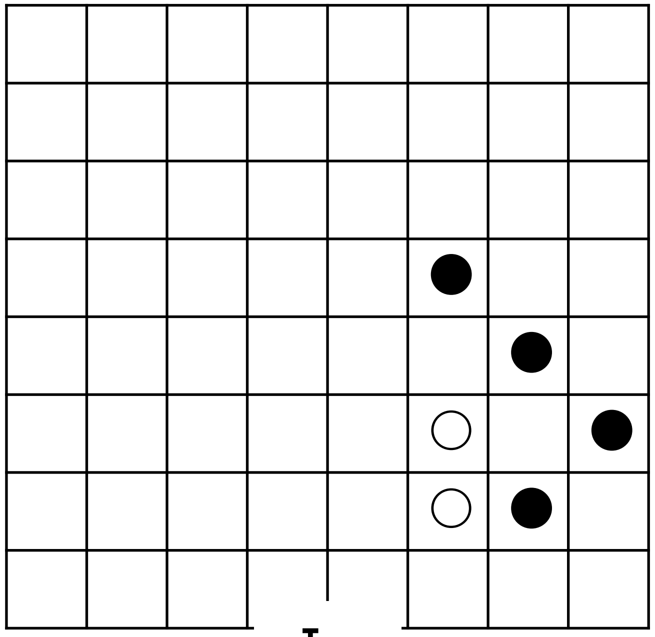
- 任意の正の整数n, 任意の正の数xに対して$0 < n \cdot \uparrow < x$
- ただし、$n \cdot \uparrow = \uparrow + \uparrow + \ldots + \uparrow$($n$個の和)

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



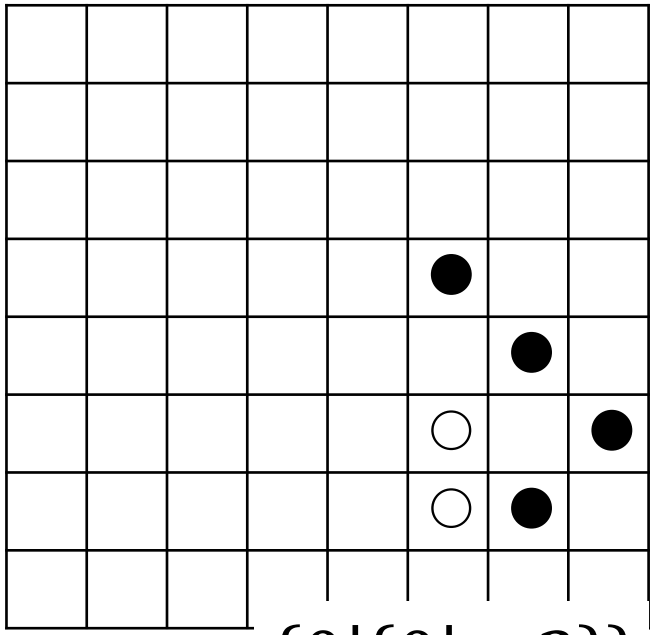
$⧾_2$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



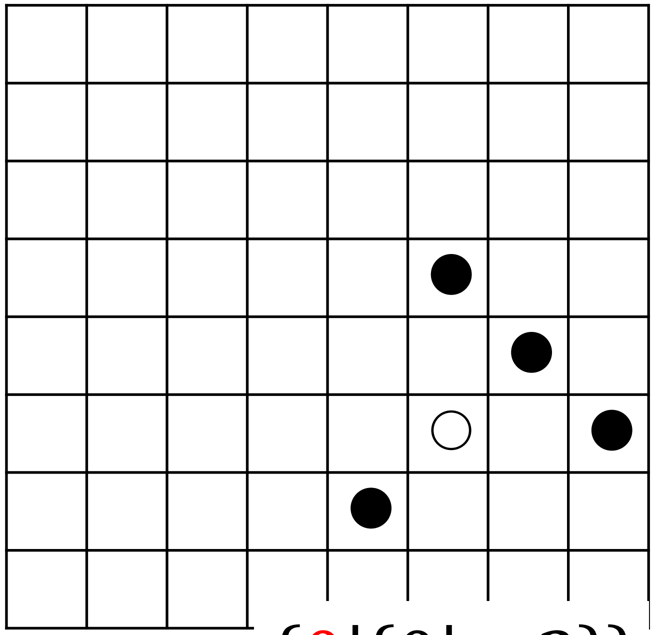
$\{0|\{0|-2\}\}$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



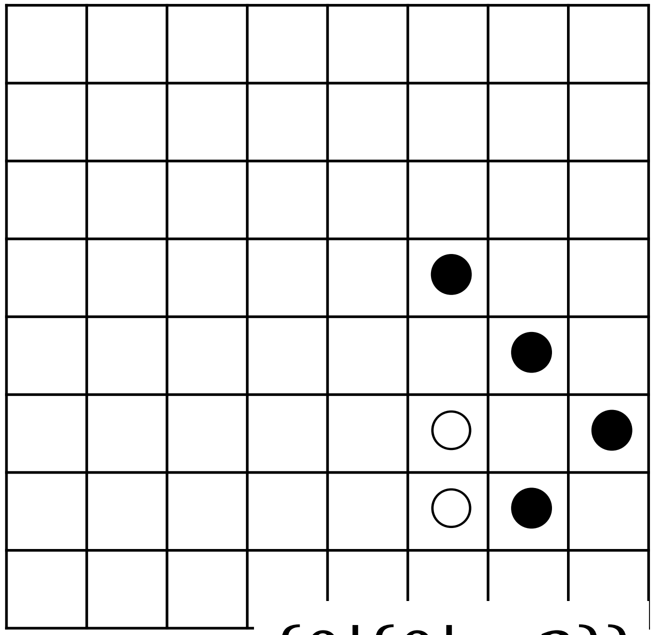
$\{0|\{0|-2\}\}$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



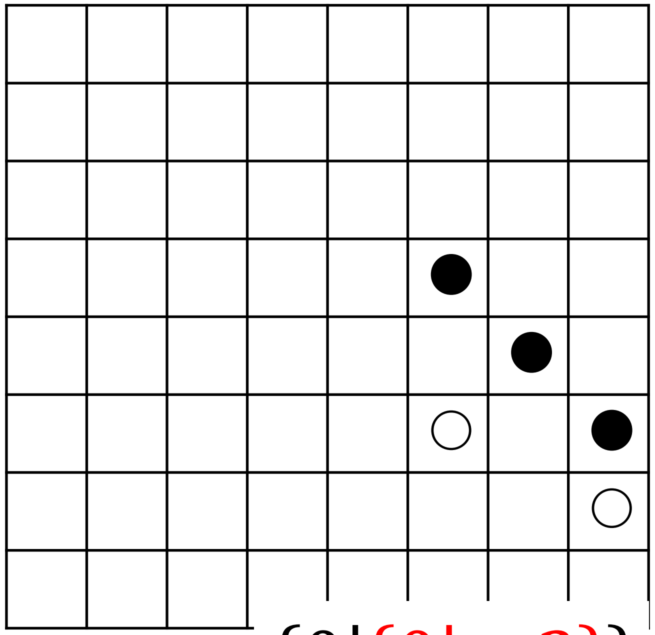
$\{0|\{0|-2\}\}$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



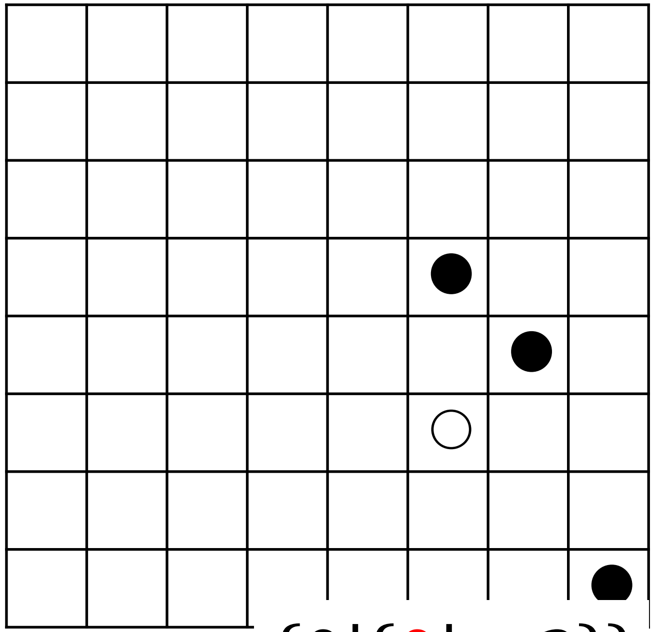
$\{0|\{0|-2\}\}$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



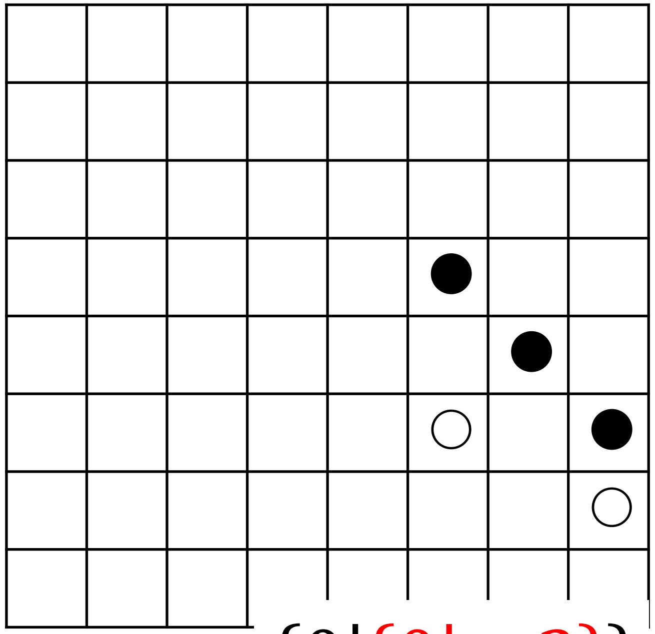
$\{0|\{0|-2\}\}$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



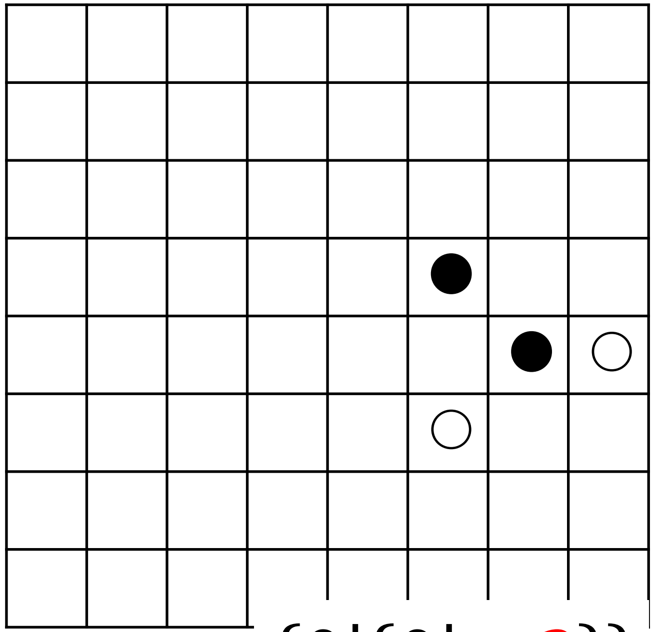
$\{0|\{0|-2\}\}$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $⧾_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $⧿_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$



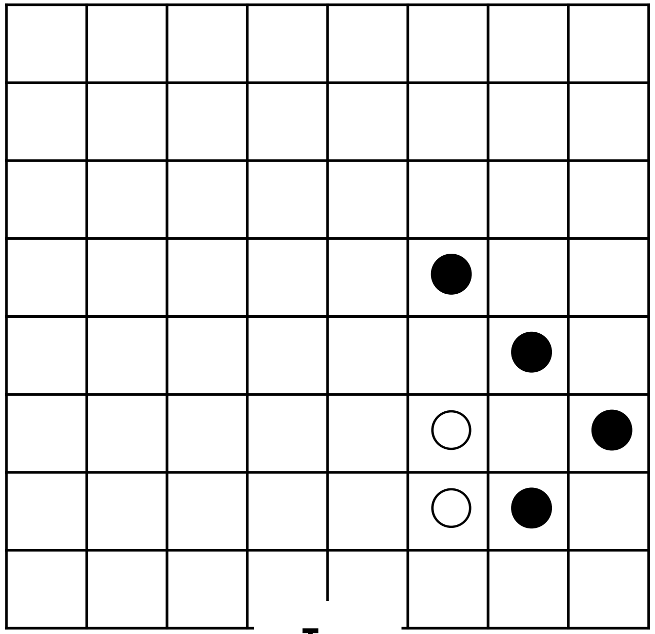
$\{0|\{0|-2\}\}$

特徴的ないくつかの値

- タイニーとマイニー

- $\text{⧾}_G \cong \{0|\{0|-G\}\}$
- $\text{⧿}_G \cong \{\{G|0\}|0\}$

- ただし、$G \geq 0$

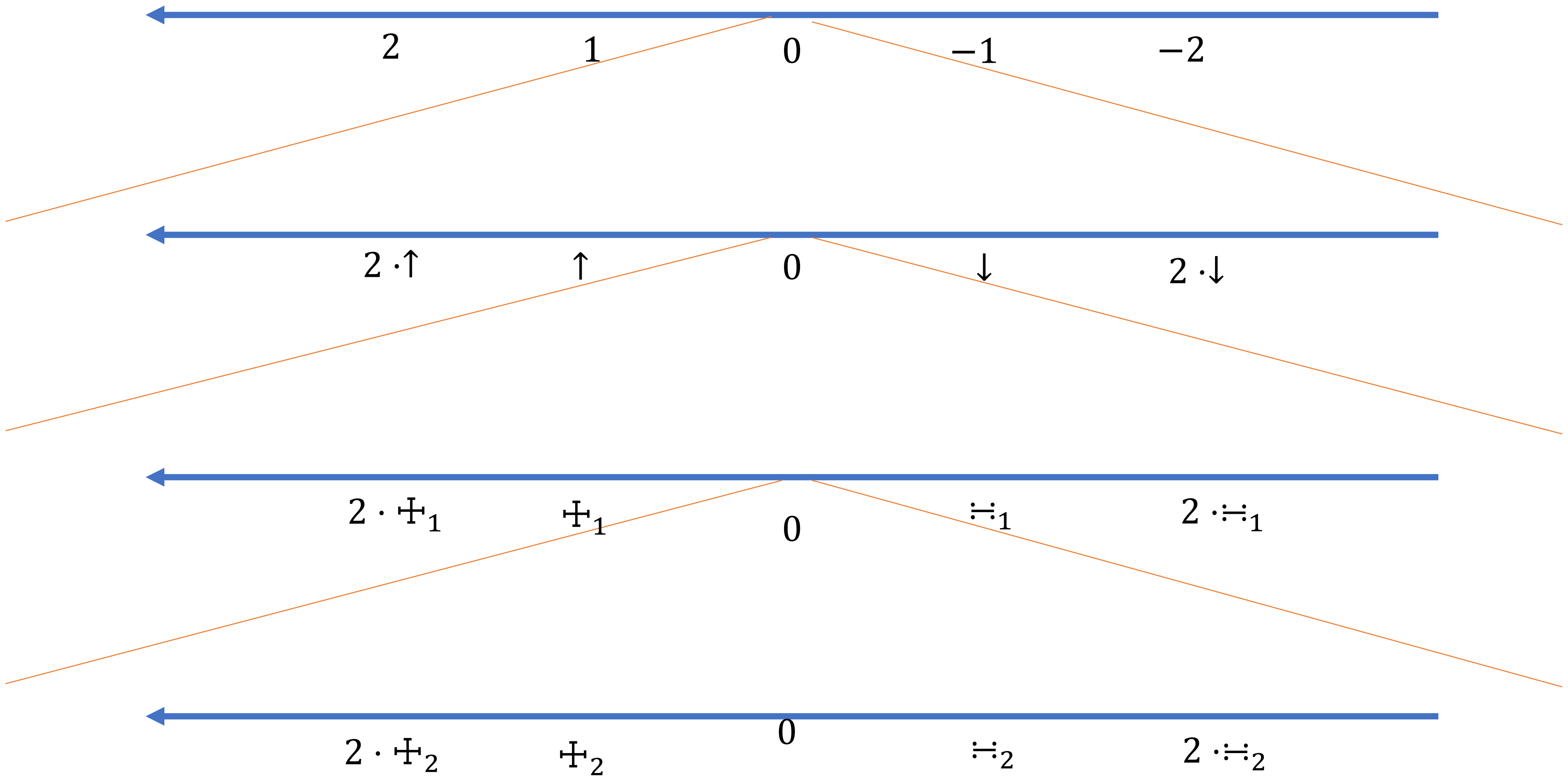


⧾_2

特徴的ないくつかの値

- 任意の数$x > 0$,　任意の正整数nに対して、$0 < n \cdot \text{☩}_x < \uparrow$

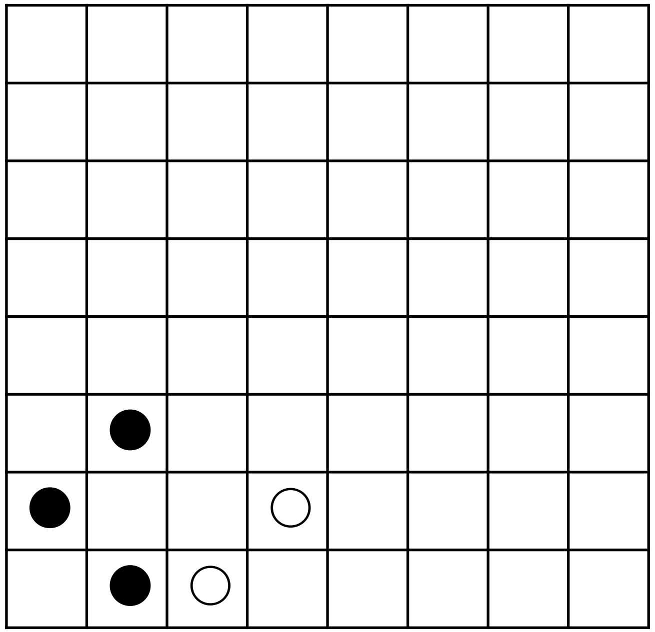
- 任意の数$x, y (x > y > 0)$,任意の正整数nに対して、
- $0 < n \cdot \text{☩}_x < \text{☩}_y$


2
1
0
−1
−2
2 ·↑
↑
0
↓
2 ·↓
2 · ⸭1
⸭1
0
≒1
2 ·≒1
2 · ⸭2
⸭2
0
≒2
2 ·≒2

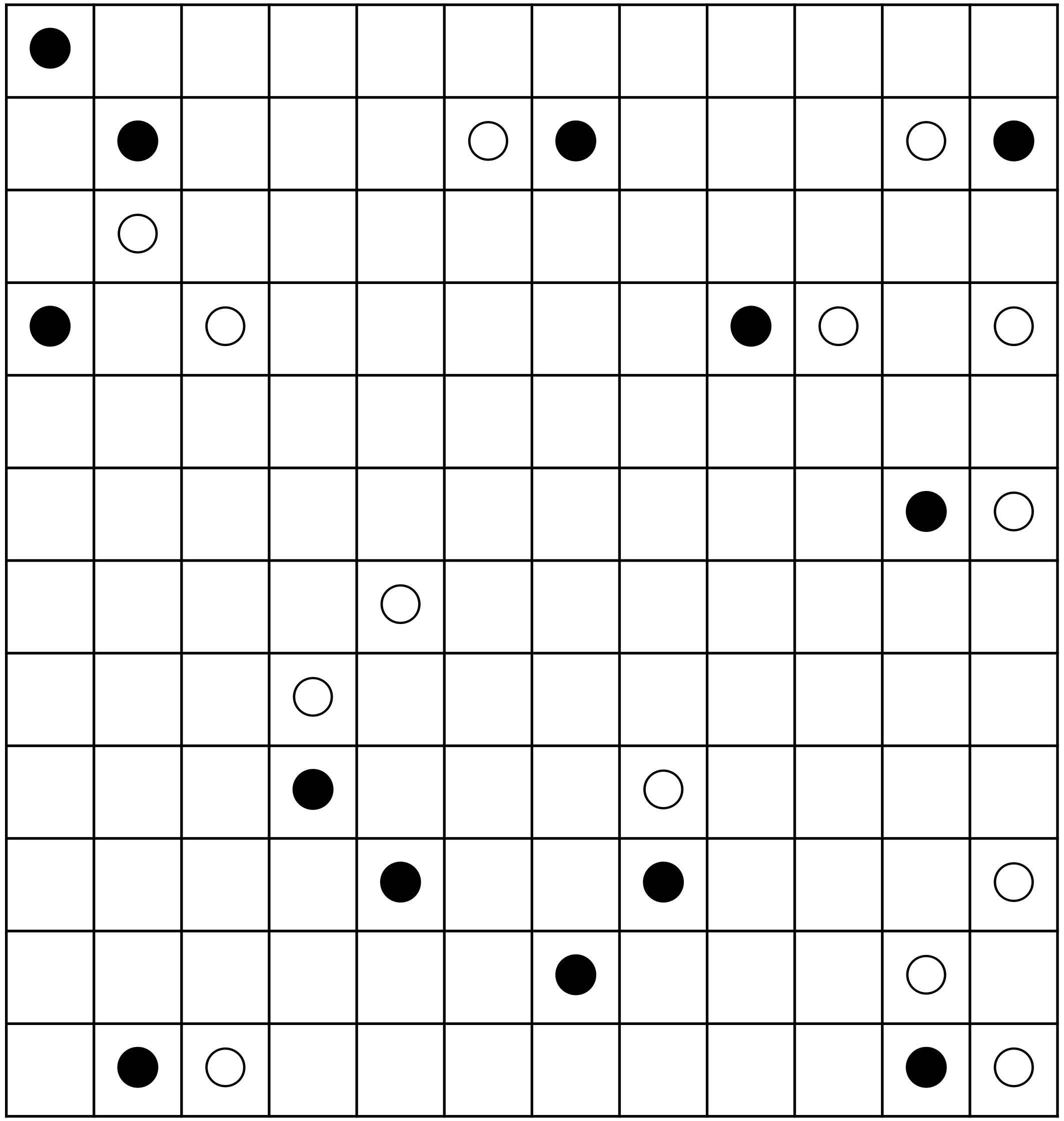
特徴的ないくつかの値

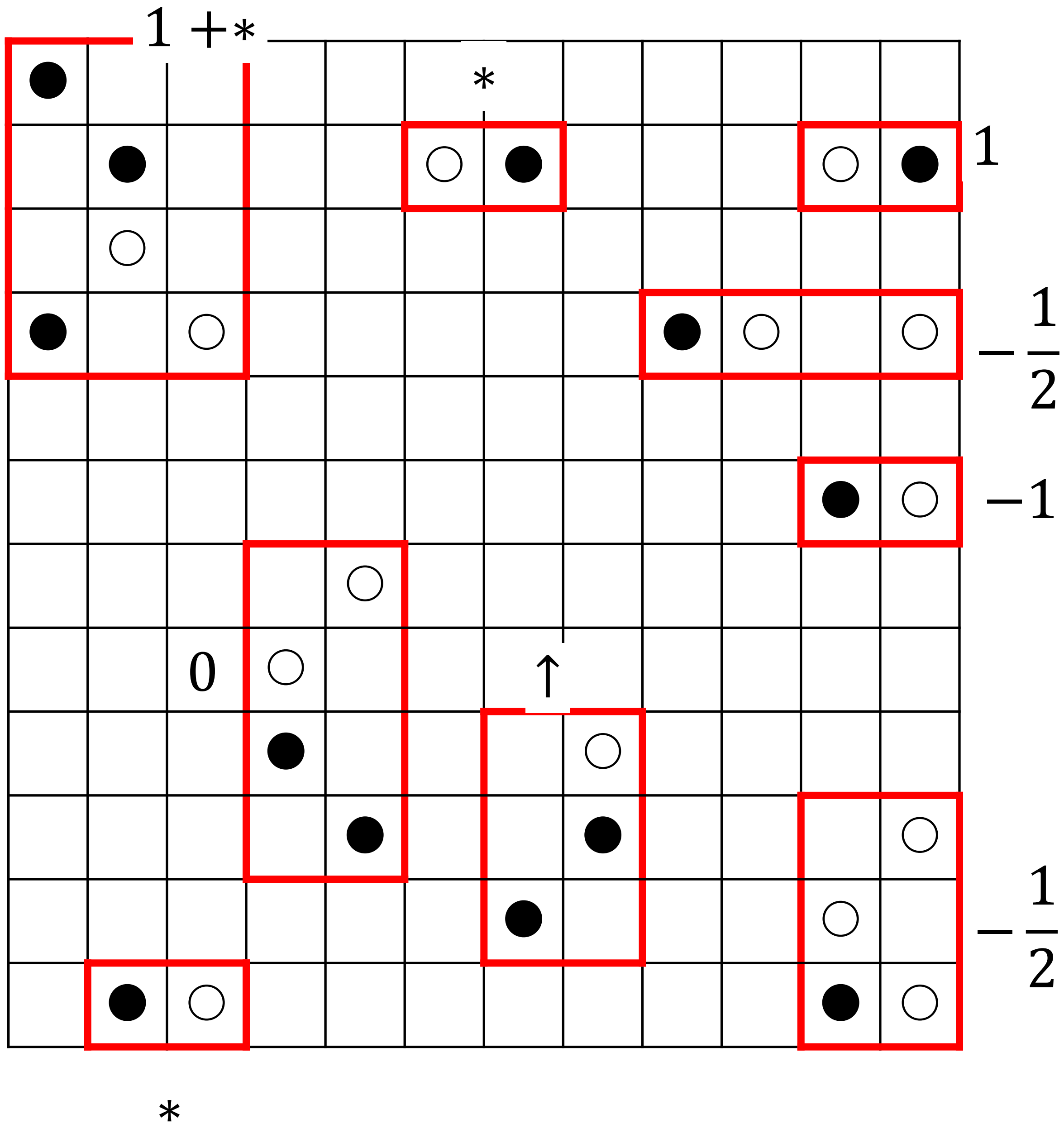
- 転換ゲーム
- 数$y > z$に対して$\{y|z\}$

- $\pm 1 = \{1|-1\}, \{5|3\}, \{7|-2\}$など。



$\{1|-2\}$

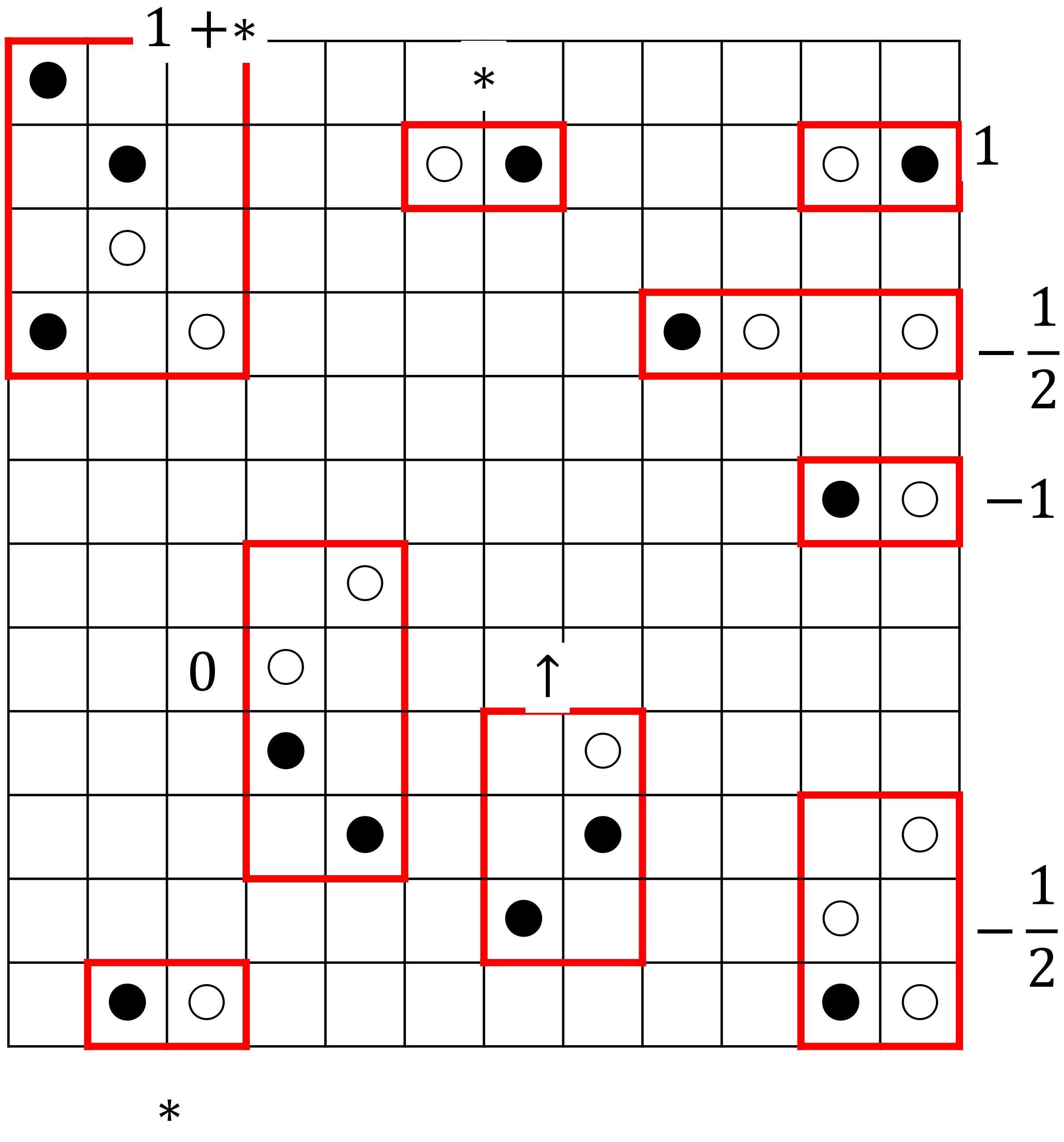




1 +*
*
1
$-\frac{1}{2}$
−1
0
↑
$-\frac{1}{2}$
*

$$1+*+*+1-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+0+*+\uparrow$$
$$=\uparrow+*$$

よって先手が勝てる！
みたいな解析ができる



本講演の概要

- 序　組合せゲーム理論とは
- 第１部　正規形不偏ゲームについて
- 第２部　正規形非不偏ゲームについて
- **第３部　さらなる発展と最近の研究**
- おわりに

第３部
さらなる発展と最近の研究

超限ゲームと超現実数

- 局面は有限個の選択肢を持つ、という制限をなくし、左選択肢と右選択肢の集合が無限集合でもよいとしたゲームを、**超限ゲーム（transfinite game）**と呼ぶ。

- ショートゲームにおいて定義された２進有理数を超限ゲームにまで拡張した概念を**超現実数（surreal number）**と呼ぶ。

超限ゲームと超現実数

- 超現実数の定義：
  - L, Rが超現実数の集合であり、どんな$x^L \in L$と$x^R \in R$に対しても$x^L < ||x^R$が成り立つとき、$x \cong \{L \mid R\}$は超現実数である。

- 例：ショートゲームの整数、２進有理数は上の定義を満たすので、超現実数である。

  復習

  整数：$n \cong \{n-1 \mid\}$

  ２進有理数：$\frac{m}{2^n} \cong \{\frac{m-1}{2^n} \mid \frac{m+1}{2^n}\}$

超限ゲームと超現実数

- 超現実数の定義：
  - L, Rが超現実数の集合であり、どんな$x^L \in L$と$x^R \in R$に対しても $x^L < \mid\mid x^R$が成り立つとき、$x \cong \{L \mid R\}$は超現実数である。

- 例：左右の選択肢が無限集合でもよいので、

$$\{0, 1, 2, \ldots \mid\}$$
$$\{0 \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$$

なども超現実数である。

超限ゲームと超現実数

- 超現実数は、積と商が定義できる。
- **積の定義**：

$$xy \cong \{x^{\mathcal{L}}y + xy^{\mathcal{L}} - x^{\mathcal{L}}y^{\mathcal{L}}, x^{\mathcal{R}}y + xy^{\mathcal{R}} - x^{\mathcal{R}}y^{\mathcal{R}} \mid x^{\mathcal{L}}y + xy^{\mathcal{R}} - x^{\mathcal{L}}y^{\mathcal{R}}, x^{\mathcal{R}}y + xy^{\mathcal{L}} - x^{\mathcal{R}}y^{\mathcal{L}}\}$$

ただし、 $x^{\mathcal{L}}, x^{\mathcal{R}}, y^{\mathcal{L}}, y^{\mathcal{R}}$ は x, y の左右の選択肢全体をわたる。

- **商の定義**：複雑のため略

- 和と差のみならず、積と商も定義できたので、超現実数全体は体になる。

超限ゲームと超現実数

- 超現実数以外にも、例えば不偏ゲームの値も超限ゲームに拡張できる。
- 超限ニム：石の個数を順序数にまで拡張したニム。プレイヤーは自分の手番で順序数αから順序数βに石数を減らす。
- 排他的論理和の定義を順序数にまで拡張することで、通常のニムと同様に必勝判定ができると知られている。

ルーピーゲームの理論

- 有限手数で終了するという制限をなくし、同型反復が生じてもよいとしたゲームを**ルーピーゲーム（loopy game）**という。

- 不偏ルーピーゲームにおいては、グランディ数を拡張した理論が知られている。

ルーピーゲームの理論

- 不偏ルーピーゲームでは、先手に必勝戦略がある$\mathcal{N}$局面、後手に必勝戦略がある$\mathcal{P}$局面のほかに、お互い**引き分け**（同型反復の繰り返し）に持ち込むのが最善な$\boldsymbol{\mathcal{D}}$**局面**がある。

- 局面Gから一手で遷移可能な任意の局面G'が$\mathcal{N}$局面ならば、Gは$\mathcal{P}$局面である。特に、Gが終了局面のときGは$\mathcal{P}$局面である。
- 局面Gから一手で遷移可能なある局面G'が$\mathcal{P}$局面ならば、Gは$\mathcal{N}$局面である。
- 局面Gから一手で遷移可能な任意の局面が$\mathcal{P}$局面でなく、ある局面が$\mathcal{D}$局面ならば、Gは$\mathcal{D}$局面である。

ルーピーゲームの理論

- 不偏ルーピーゲームのグランディ数は、非負整数のほか、$\infty(A)(A \subset \mathbb{N}_0)$という値を取りうる．局面$G, H$に対して
$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

である。ただし、
  - $n_1 \oplus n_2$は通常の排他的論理和
  - $n \oplus \infty(A) = \infty(A) \oplus n = \infty(n \oplus A)$（ただし$n \oplus A = \{n \oplus a \mid a \in A\}$）
  - $\infty(A) \oplus \infty(B) = \infty(\emptyset)$

とする。計算結果が
  - 0のとき$\mathcal{P}$局面
  - 正整数または$\infty(A)(0 \in A)$のとき$\mathcal{N}$局面
  - $\infty(A)(0 \notin A)$のとき$\mathcal{D}$局面

となる。

ルーピーゲームの理論

- 局面全体の集合$\widetilde{\mathbb{Lp}}$
- 帰結類（必勝戦略保持者による分類）$\mathbb{O} = \{\mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{D}\}$
- 局面から帰結類への写像$\boldsymbol{o}$
- 局面同士の直和演算子$+$

- $G, H \in \widetilde{\mathbb{Lp}}$について、任意の$X \in \widetilde{\mathbb{Lp}}$に対して$\mathrm{o}(G + X) = o(H + X)$のとき$G =_{\widetilde{\mathbb{Lp}}} H$とする。

ルーピーゲームの理論

- 非不偏ルーピーゲームについても研究がされており、いくつかの特徴的な値が知られている。

- 例えば、$\mathbf{on} \cong \{\mathbf{on}\mid\}$は左のみが状況を変化させずに着手を続けられる局面であり、任意の局面Gに対して、$\mathbf{on} \geq G$が成立する。
また、$\mathbf{over} \cong \{0 \mid \mathbf{over}\}$は
$$\mathbf{over} = \sup(\{n \cdot\uparrow \mid n \in \mathbb{N}_0\}) = \inf(\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0\})$$
を満たす。

逆形ゲームの理論

- 最後の着手者が勝者という勝利条件を、最後の着手者が敗者（打てなくなった方が勝ち）という勝利条件に変えたゲームを、逆形ゲームという。

- 例：逆形ニム
  - 逆形ニムの局面$(m_1, \ldots, m_n)$が$\mathcal{P}$局面になるのは、

$$\begin{cases} m_1 \oplus \cdots \oplus m_n = 0 \text{かつ、ある} m_i > 1 \\ m_1 \oplus \cdots \oplus m_n = 1 \text{かつ、任意の} m_i \leq 1 \end{cases}$$

  のとき。

逆形ゲームの理論

- 逆形ゲームの理論は一般に正規形より複雑になる。特に、正規形では群の構造を持っていたが、逆形では群の構造が崩れる。
- また、正規形では$\mathcal{P}$局面がすべて$0 \cong \{|\}$の同値類に含まれていたが、逆形では$\mathcal{P}$局面同士でも同値にならず、様々な同値類に分かれることになる。
- ということで一般には複雑だが、$\mathcal{P}$局面の同値類（逆形商と呼ぶ）に注目して性質を調べるなどの工夫が行われる。

逆形ゲームの理論

- また、**宇宙（universe）**を絞って研究を行うということもある。
- **定義**：局面Gの**共役**$\overleftrightarrow{G}$ を$\overleftrightarrow{G} \cong \{\overleftrightarrow{G^{\mathcal{R}}} \mid \overleftrightarrow{G^{L}}\}$として、再帰的に定める
- **定義**：$\mathcal{U}$をある組合せゲームの局面の集合とする。もし$\mathcal{U}$が次の性質を満たすならば、$\mathcal{U}$を宇宙と呼ぶ。
  - 任意の$G, H \in \mathcal{U}$に対して、$G + H \in \mathcal{U}$となる。
  - 任意の$G \in \mathcal{U}$に対して、Gの任意の選択肢は$\mathcal{U}$に属する。
  - 任意の$G \in \mathcal{U}$に対して、$\overleftrightarrow{G} \in \mathcal{U}$となる。

逆形ゲームの理論

- 宇宙を絞った場合は、よい性質が得られることがある。
- また、通常ゲームを扱うときは同じルールのゲームで局面が分割されていくことが多いので、局面集合に一定の条件が課せられるという発想はある意味自然である。

得点付きゲームの理論

- 最後の着手者が勝者という勝利条件を、多くの得点を獲得したほうが勝者、という勝利条件に変えたゲームを、**得点付きゲーム（scoring game）**という。
- 得点付きゲームも逆形ゲームと同様に、一般には複雑な構造を持つが、**保証された得点付きゲーム（guaranteed scoring game）**という宇宙では、通常の正規形ゲームの局面を順序保存埋め込みできるなど、いくつかのよい性質を持つということが知られている。

時間調整用：講演者の主な成果

- 皇帝ニムと呼ばれる新しい種類の局面の和を考案し、$\mathcal{P}$局面長と呼ばれるパラメータを用いて必勝戦略保持者を判定する方法を示した。
- ゲーム木の高さが 4 の標準形の個数について、これまでの上下界が3.0×10^{12}以上10^{434}以下であったところ、$10^{28.2}$以上4.0×10^{184}以下に改善した。
- 任意の局面の値を持つゲームのルールを全象ルールと呼び、一般化コナネが知られていたが、タイル返し、Go on lattice、扉の向こうへという 3 種類の全象ルールを発見した。

本講演の概要

- 序　組合せゲーム理論とは
- 第１部　正規形不偏ゲームについて
- 第２部　正規形非不偏ゲームについて
- 第３部　さらなる発展と最近の研究
- **おわりに**

おわりに

おわりに

- 以上が組合せゲーム理論の世界の概要であり、「組合せゲーム理論の世界」の概要でもあります。
- 講演では証明や詳細、細かいトピックはほとんど省略してしまったので、ご関心のある方はぜひ書籍の方もご参照ください。よろしくお願いします。
- さらに、書籍・講演では紹介しきれなかった組合せゲーム理論の面白い結果やテーマも多数あります。これらについても各所で（日本語で）発信し、組合せゲーム理論の面白さをこれからも広めていきたいと思っていますので、今日の講演で組合せゲーム理論に興味を持ってくださった方は、お気軽にご連絡ください。また、次に紹介するような研究集会でもお待ちしています！

研究集会の宣伝

- 日本組合せゲーム理論研究集会：

毎年夏に組合せゲーム理論に特化した研究集会を開いています。

また、最近月一回のJapan Virtual CGT（オンラインワークショップ）を始めました。（次回：2月〇日）

- Combinatorial Game Theory Colloquium

２年ごとにポルトガルで組合せゲーム理論に特化した国際研究集会が開かれています。

研究集会の宣伝

- そのほか、組合せゲーム理論の研究内容を発表可能な研究集会がいくつかあります。

（組合せゲーム・パズルプロジェクト、情報処理学会ゲーム情報学研究会、JCDCGGG、ゲーム・プログラミング・ワークショップ…）

この分野にご関心のある方は、ぜひお気軽にお問合せください。

さらに……

研究集会の宣伝

- Alda Carvalho先生&Carlos Santos先生来日記念
日本組合せゲーム理論研究集会

ポルトガルからAlda Carvalho先生とCarlos Santos先生をお招きできることになったので、3月6日・7日に国立情報学研究所で組合せゲーム理論研究集会を開きます。

参加者・発表者募集中です！

参考文献

- [1] 安福智明，坂井公，末續鴻輝：組合せゲーム理論の世界　数学で解き明かす必勝法，共立出版（2024）
- [2] Albert M. H., Nowakowski R. J., Wolfe D.: Lessons in Play, An Introduction to Combinatorial Game Theory, A. K. Peters (2007)（川辺治之訳：組合せゲーム理論入門　勝利の方程式，共立出版（2011））
- [3] Bouton, C. L.: Nim, a game with a complete mathematical theory, Annals of Mathematics, Vol. 3, No. 1/4, pp. 35–39 (1901)
- [4] Fraenkel A. S. : How to beat your Wythoff game's opponent on three fronts, Amer. Math. Monthly 89. pp.353-361 (1982)

参考文献

- [5] Fraenkel A. S. and Lorberbom M.: Nimhoff games, J. Combin. Theory, Series A, 58(1) pp.1-25 (1991).
- [6] Grundy, P. M.: Mathematics and games, Eureka, Vol. 2, pp. 6–9 (1939).
- [7] Levine L.: Fractal sequences and restricted nim, Ars. Combinatoria, 80, pp.113-128 (2006)
- [8] Moore, E. H.: A generalization of the game called nim, Annals of Mathematics, Vol. 11, No. 3, pp. 93–94 (1910).
- [9] 佐藤文広：石取りゲームの数学　ゲームと代数の不思議な関係，数学書房 (2014).

参考文献

- [10] Siegel A. A.: Finite Excluded Subtraction Sets and Infinite Modular Nim, M. Sc. Thesis, Dalhousie University (2005)
- [11] Siegel A. N.: Combinatorial Game Theory, Graduate studies in mathematics, Vol. 146, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2013).
- [12] Suetsugu K.: Emperor nim and emperor sum: a new sum of impartial games, International Journal of Game Theory, 2021. https://doi.org/10.1007/s00182-021-00782-0
- [13] Suetsugu K.: Improving upper and lower bounds of the number of games born by day 4, Games of No Chance VI, accepted.

参考文献

- [14] Suetsugu K.: Universal partisan rulesets and a universal partisan dicotic ruleset, submitted to International Journal of Game Theory.
- [15] Sprague R. P.: Über mathematische Kampfspiele, Tôhoku Math. J., Vol. 41, pp. 438–444 (1935-36).
- [16] Wythoff W. A.: A modification of the game of Nim, Nieuw Archief voor Wiskunde. Reeks 2, Vol. 7, pp. 199– 202 (1907).