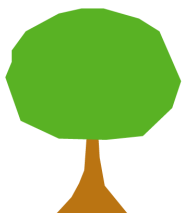


HISTとHalin graph 2

土屋 翔一(専修大学)



本講演で扱う未解決予想

予想 1 (Malkevitch, 1978)

任意の4-連結平面グラフは**HIST**を持つ.

予想 2 (Hoffmann-Ostenhof, 2011)

任意の連結な3-正則グラフは**spanning tree**, **2-正則グラフ**, **1-正則グラフ** (**マッチング**)に分割できる. ただし, マッチングは空集合でもよい.

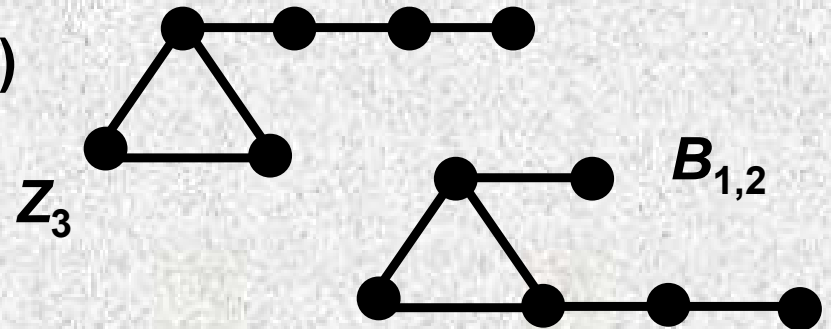
予想 3 (Chen, Han, O, Shan and T, 2017)

$\forall$ 3-連結 $\{H_1, H_2\}$ -free graph (頂点数十分大)

が**spanning Halin subgraph**を持つ $\Leftrightarrow$

(i) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, Z_3\}$, または

(ii) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$.





講演内容

- (1)基本用語の説明(主にtree関連)
- (2)曲面上のグラフ
 - ・三角形分割とHIST
 - ・平面グラフとHIST
 - ・Halin graph
- (3)禁止部分グラフ
 - ・HISTとその緩和
 - ・Spanning Halin subgraphの存在保証
- (4)直径を制限したグラフ
- (5)次数条件
 - ・正則グラフ
 - ・最小次数条件
 - ・非隣接2頂点における次数条件





講演内容

(1)基本用語の説明(主にtree関連)

(2)曲面上のグラフ

- ・三角形分割とHIST
- ・平面グラフとHIST
- ・Halin graph

(3)禁止部分グラフ

- ・HISTとその緩和
- ・Spanning Halin subgraphの存在保証

(4)直径を制限したグラフ

(5)次数条件

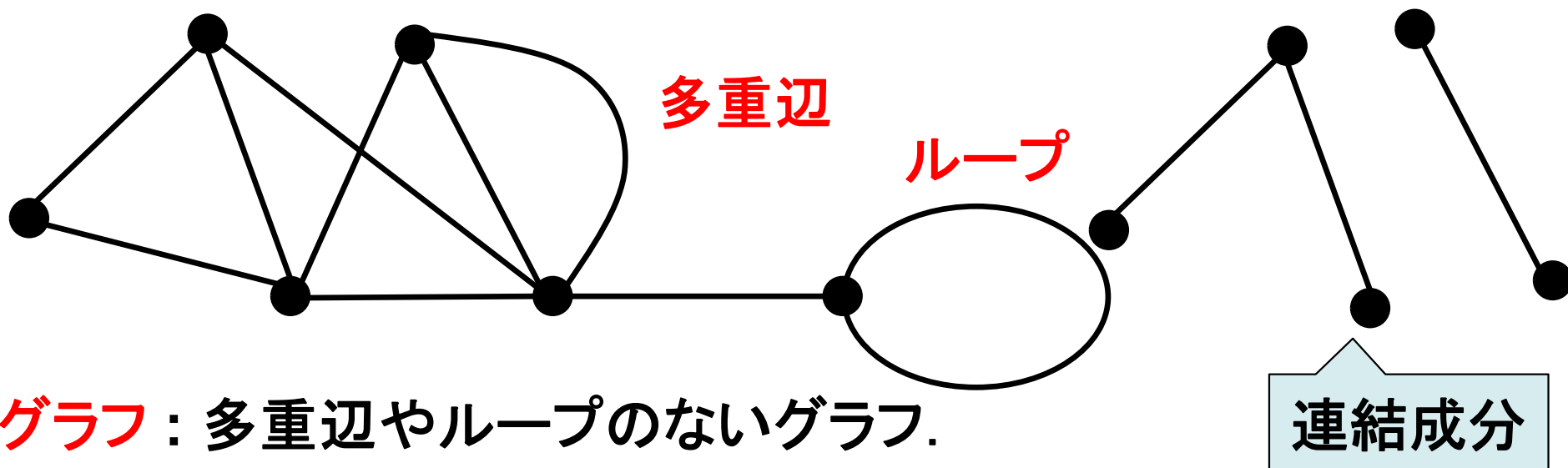
- ・正則グラフ
- ・最小次数条件
- ・非隣接2頂点における次数条件





グラフ

グラフ $G(V, E)$: 頂点集合 V と辺集合 E の組.



単純グラフ: 多重辺やループのないグラフ.

G の **subgraph** $G'(V', E')$: $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ を満たすグラフ.

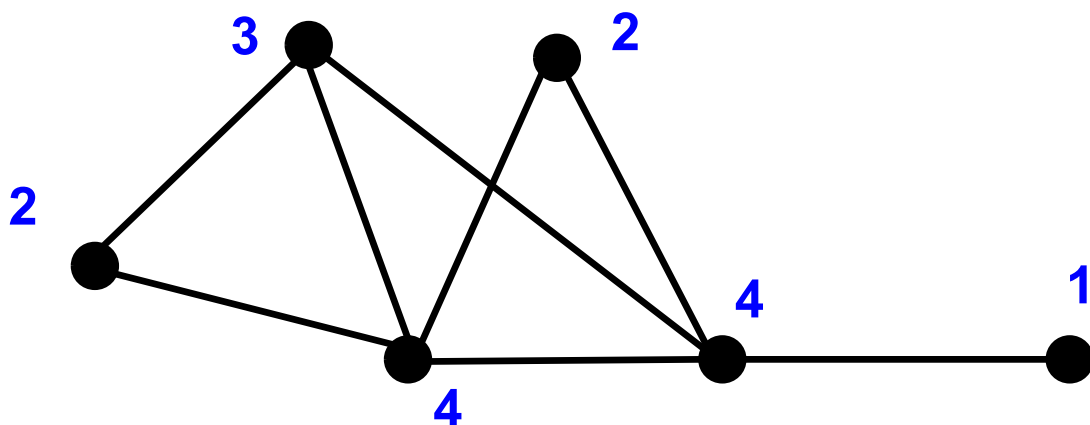
G の **spanning subgraph** $G'(V', E')$:
 $V'=V$ を満たす G の subgraph.

連結グラフ: 任意の2頂点間に経路が存在するグラフ.

k -連結グラフ: 任意の $(k-1)$ 頂点を取り除いても連結性を保つグラフ.



次数と閉路

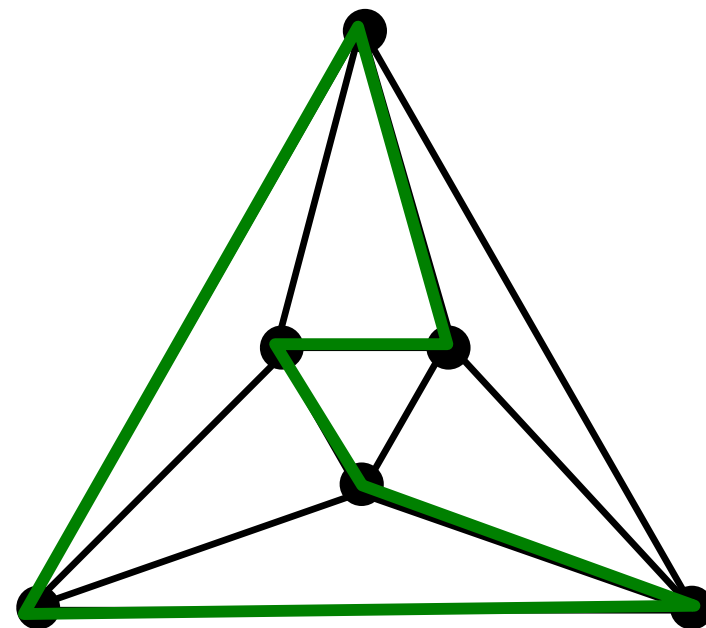


頂点 v の**次数**： v に接続する辺の本数.

閉路：各頂点の次数が2の連結グラフ.

グラフ G の**ハミルトン閉路**：
 G のspan. subgraphとなる閉路.

ハミルトン閉路の判定問題はNP完全.



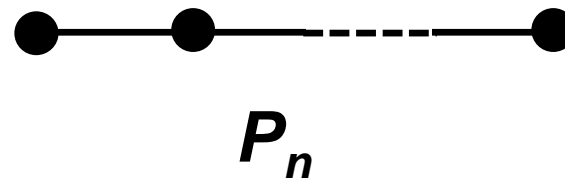


Tree

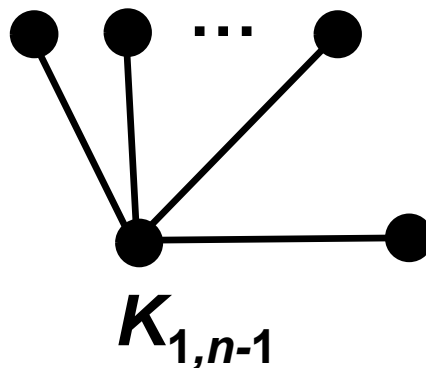
tree : 閉路の無い連結グラフ.

端点を辺で結ぶと閉路

path (道): 各頂点(2点の例外を除く)の次数が2のtree,
または1点のtree.



star : 各頂点(1点の例外を除く)の次数が1のtree,
または2点以下のtree.



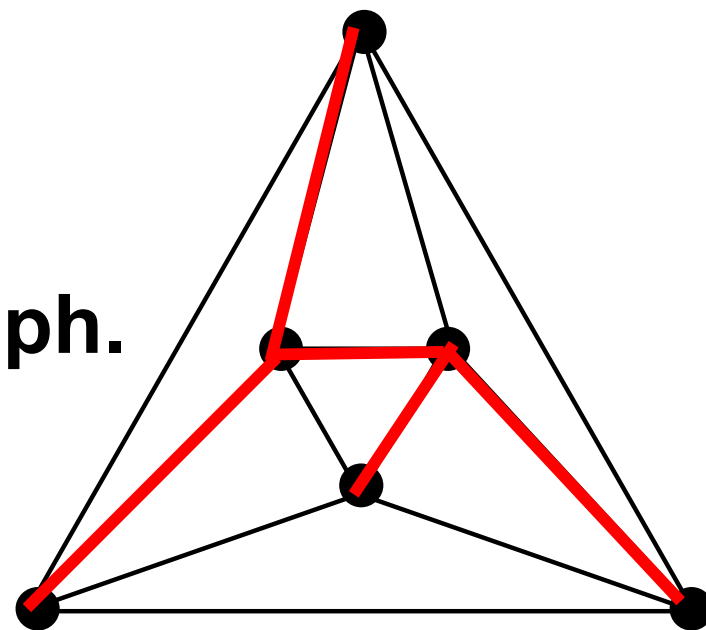


HIST

G : 単純グラフ.

G の **spanning tree** :

閉路のない連結な G の span. subgraph.



G の **homeomorphically irreducible spanning tree (HIST)** :
次数2の頂点を持たない G の spanning tree.

HIT: 次数2の頂点を持たない tree.

HIST の判定問題は NP 完全 (Albertson et al., 1990)



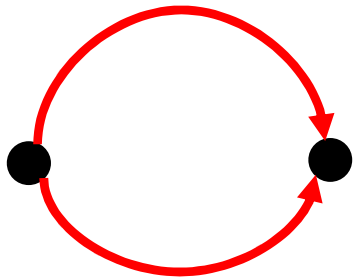


Treeの基本的な性質1

グラフ T について以下の命題は同値.

- (1) T はtree (閉路を持たない連結グラフ).
- (2) T の任意の2頂点を結ぶpathはただ一つ.
- (3) T は連結性に関して極小 (任意の辺がbridge).
- (4) T は非閉路性に関して極大 (任意の非隣接2頂点を結ぶ辺を加えると閉路を持つ).

(1) $\Rightarrow$ (2)



(2) $\Rightarrow$ (3)



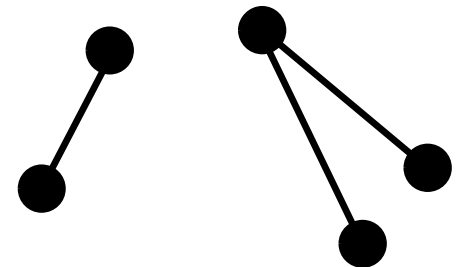
(3) $\Rightarrow$ (4)

≠閉路



(4) $\Rightarrow$ (1)

≠閉路



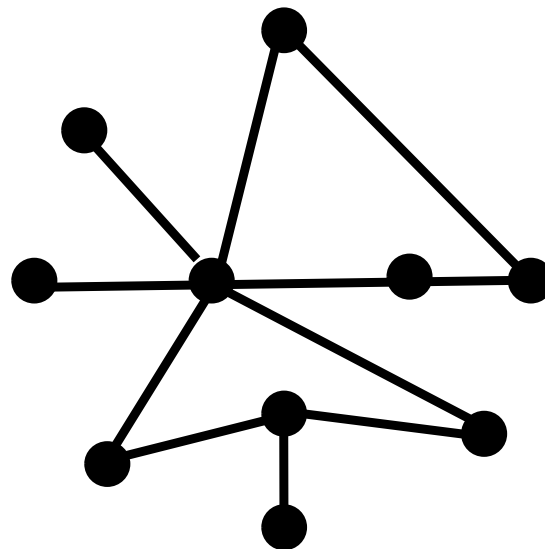


Treeの基本的な性質2

T : n 頂点のtree.

- ・ T は $n-1$ 本の辺を持つ.
- ・ $n \geq 2$ のとき, T は次数1の頂点を2つ以上持つ.
- ・ T から次数1の頂点をいくつか取り除いたグラフもtree.

グラフ G がspanning treeを持つ $\Leftrightarrow G$ は連結.





HIST(HIT)の基本的な性質1

T : n 頂点のHIT.

(1) $n \neq 3$.

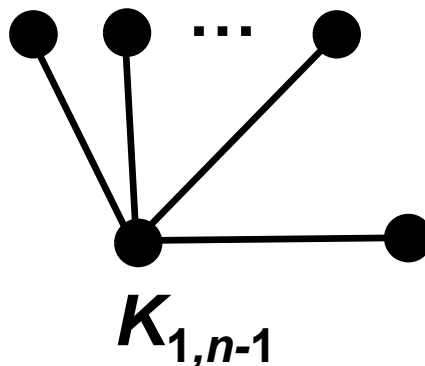
(2) $n \in \{1, 2, 4, 5\}$ のとき, T はstar.

(3) $n \geq 2$ のとき, T は次数1の頂点を $(n+2)/2$ 以上含む.

(3)の証明)

T の頂点数に関する数学的帰納法

T がstarのとき成立 ($n=2, 4, 5$ の場合が示せた).





HIST(HIT)の基本的な性質1

T : n 頂点のHIT.

(1) $n \neq 3$.

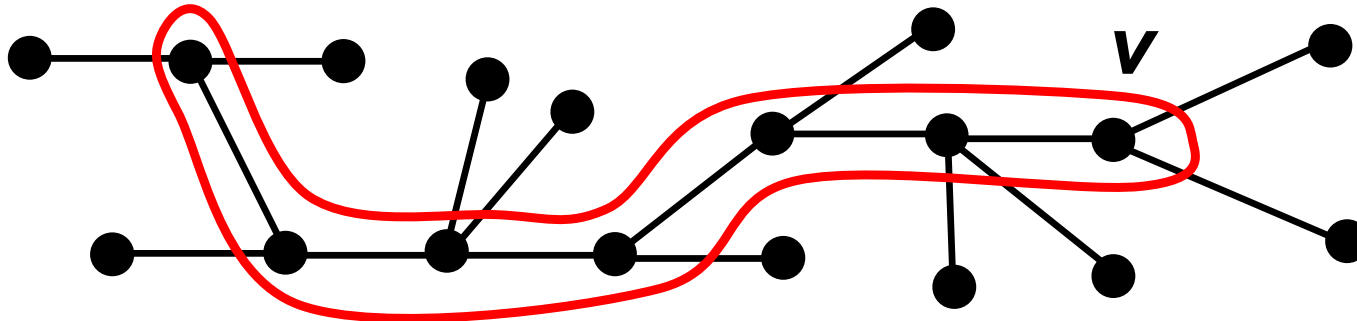
(2) $n \in \{1, 2, 4, 5\}$ のとき, T はstar.

(3) $n \geq 2$ のとき, T は次数1の頂点を $(n+2)/2$ 以上含む.

(3)の証明)

頂点数が n 未満のときに命題が成り立つと仮定する.

T は次数1の頂点が2つ以上, かつ次数3以上の頂点が1つ隣接する頂点 v を含む.





HIST(HIT)の基本的な性質1

T : n 頂点のHIT.

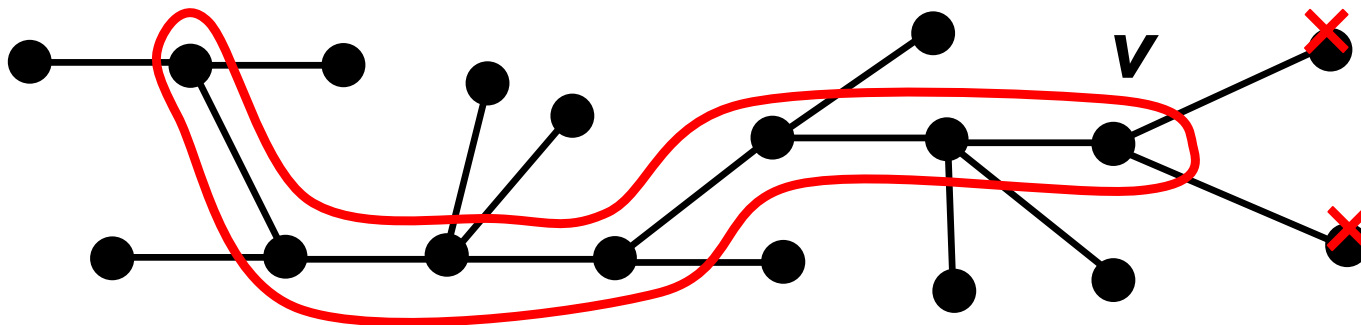
(1) $n \neq 3$.

(2) $n \in \{1, 2, 4, 5\}$ のとき, T はstar.

(3) $n \geq 2$ のとき, T は次数1の頂点を $(n+2)/2$ 以上含む.

(3)の証明)

v に隣接する次数1の頂点を p 個($p \geq 2$)とすると, T からこれらの頂点を取り除いたグラフ T' もHIT.





HIST(HIT)の基本的な性質1

T : n 頂点のHIT.

(1) $n \neq 3$.

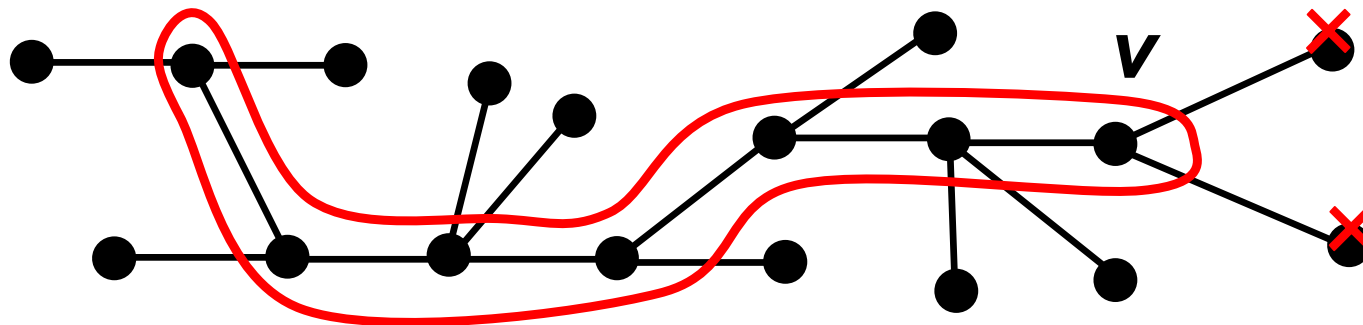
(2) $n \in \{1, 2, 4, 5\}$ のとき, T はstar.

(3) $n \geq 2$ のとき, T は次数1の頂点を $(n+2)/2$ 以上含む.

(3)の証明)

帰納法の仮定より, T' の次数1の頂点は $(n-p+2)/2$ 以上.

T の次数1の頂点は $(n-p+2)/2 + p - 1 = (n+p)/2$ 以上.

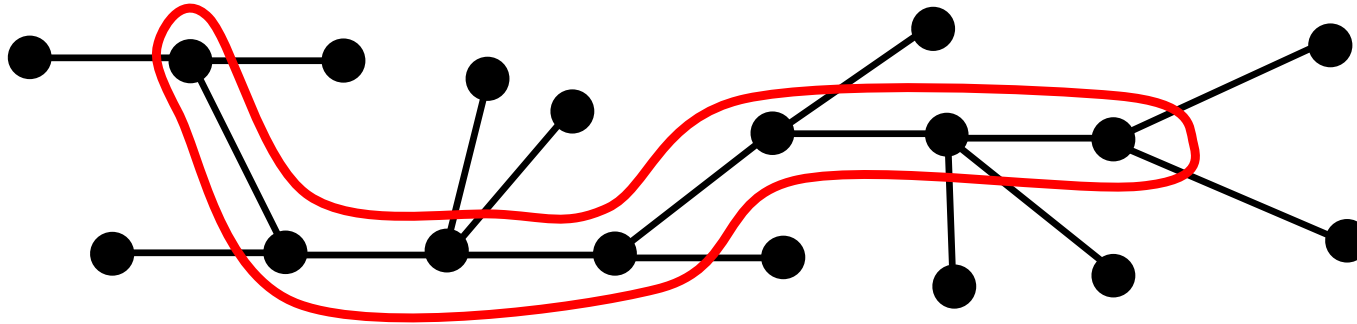


HIST(HIT)の基本的な性質2

命題 4

G : 連結グラフ. S : G のcut set.

S の各頂点の次数が2 $\Rightarrow G$ は**HIST**を持たない.





spanning treeやHISTの利点

- ・spanning tree の利点

- (1) 閉路を含まないモデルを構築できる.
- (2) 全ての頂点を含む**辺数最小**の連結なモデルを構築できる.

- ・HISTの利点

- (1) 次数2の頂点を排除したモデルを構築できる.
- (2) 任意の2頂点が**高々頂点数の半分**くらいの長さの path で結ばれたモデルを構築できる.

高さが制限される

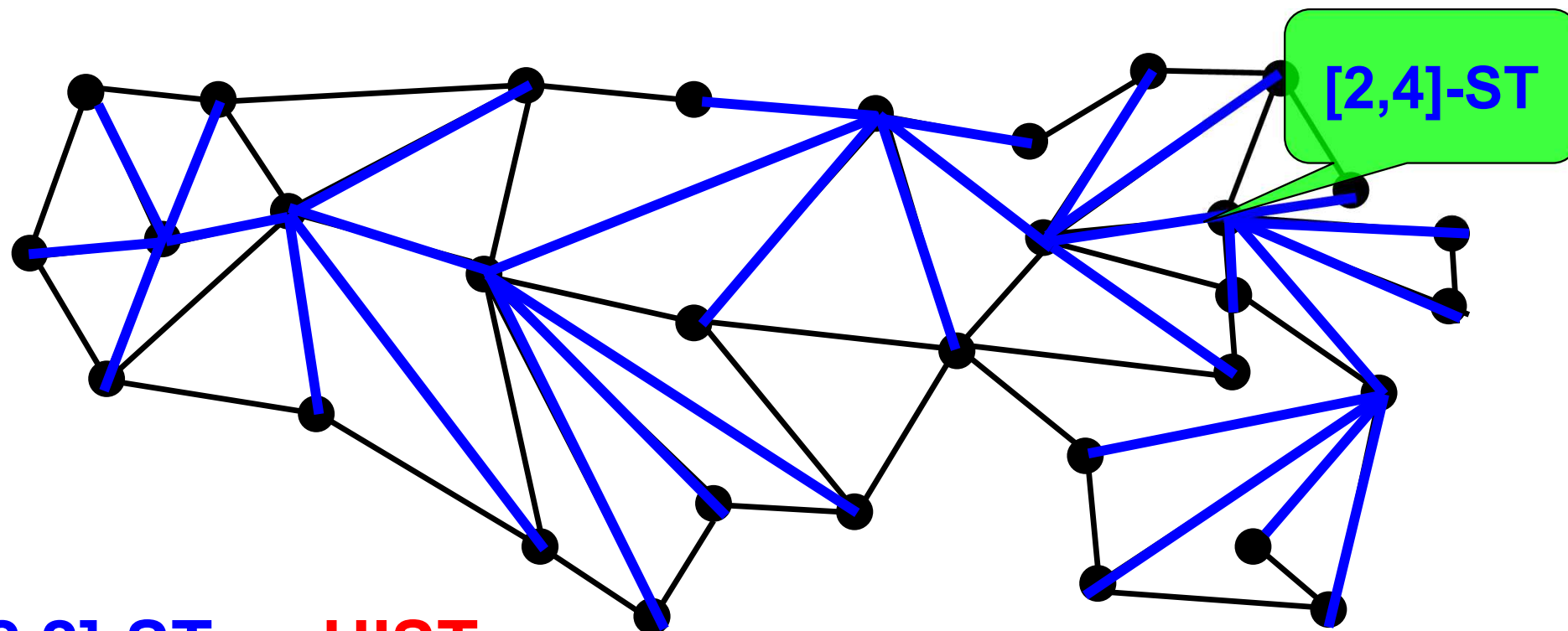




$[2,k]$ -ST (HISTの拡張)

HIST : 次数2の頂点を含まないspanning tree.

$[2,k]$ -ST : 次数2~ k の頂点を含まないspan. tree.



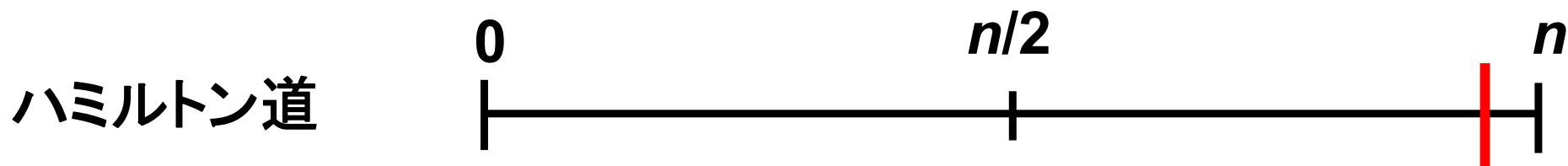
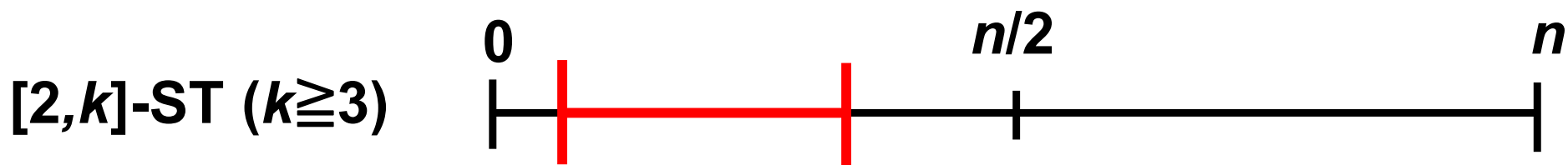
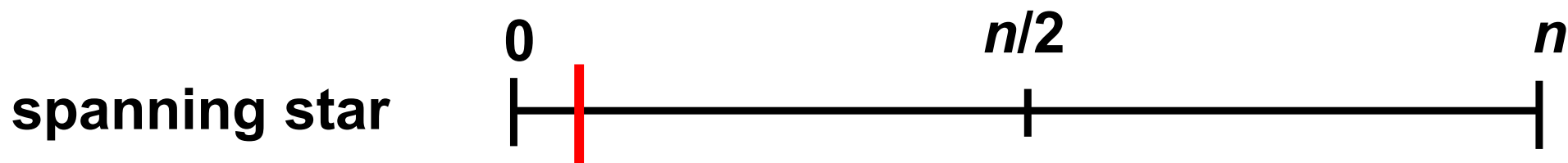
※ **$[2,2]$ -ST** $\Leftrightarrow$ **HIST**





高さの低いspanning tree

G : 頂点数 n の連結グラフ





講演内容

(1)基本用語の説明(主にtree関連)

(2)曲面上のグラフ

- ・三角形分割とHIST
- ・平面グラフとHIST
- ・Halin graph

(3)禁止部分グラフ

- ・HISTとその緩和
- ・Spanning Halin subgraphの存在保証

(4)直径を制限したグラフ

(5)次数条件

- ・正則グラフ
- ・最小次数条件
- ・非隣接2頂点における次数条件



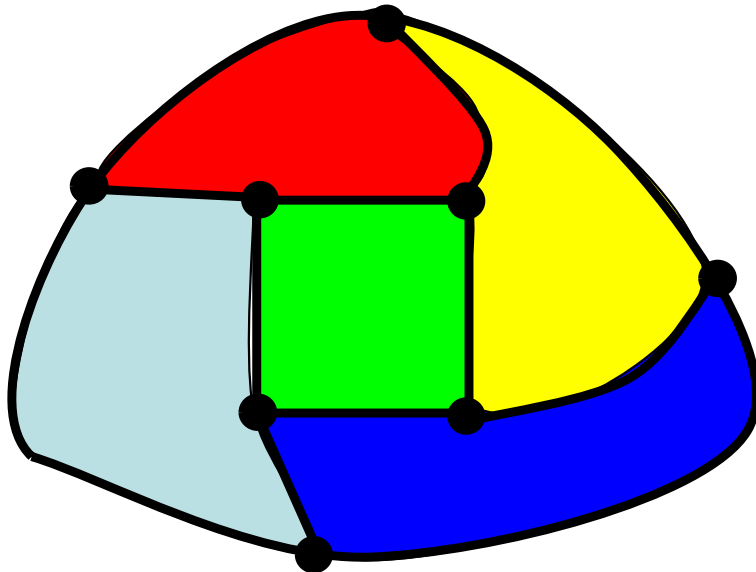


曲面上のグラフとHIST

予想 5 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)
曲面上の任意の三角形分割は**HIST**を持つ.

予想 6 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)
任意の辺が少なくとも2つの三角形に含まれる連結グラフは**HIST**を持つ.

予想 1 (Malkevitch, 1978)
任意の4-連結平面グラフは**HIST**を持つ.



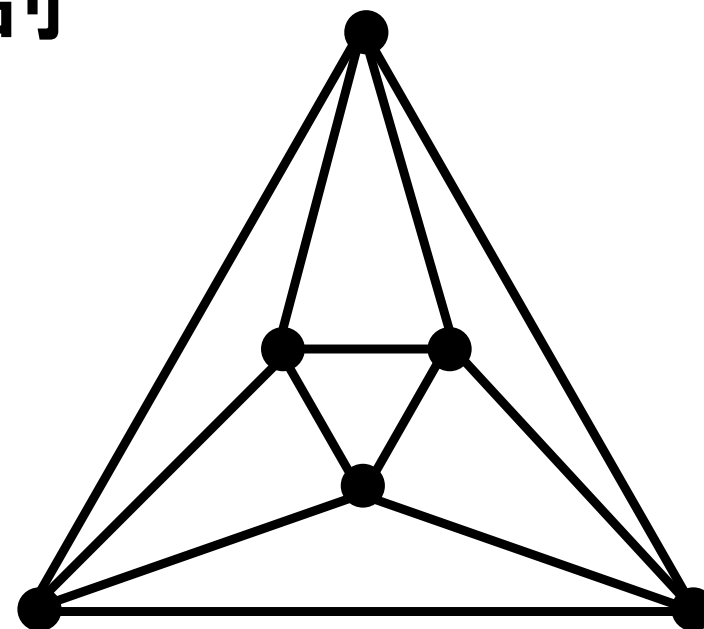
外領域も1枚の面とみなす



三角形分割

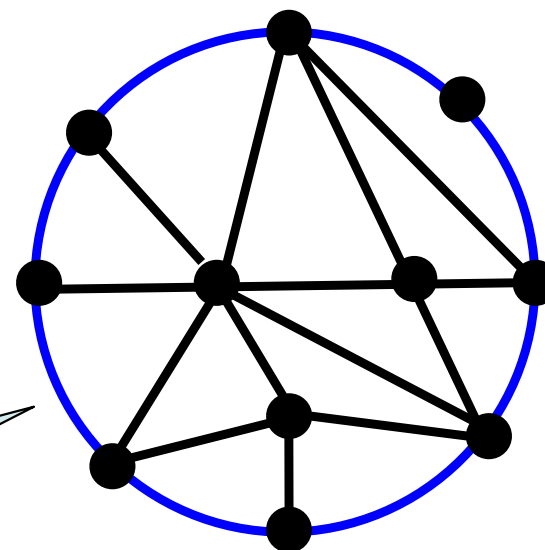
Triangulation(三角形分割)

各面が三角形の曲面上のグラフ



Near triangulation

外領域以外の面が三角形の
平面グラフ



境界閉路





三角形分割のHIST

定理 7 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)
頂点数が4以上のnear triangulation は**HIST**を持つ.

予想 5 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)
任意の曲面の三角形分割は**HIST**を持つ.

near triangulation

平面の三角形分割

平面の場合が解決

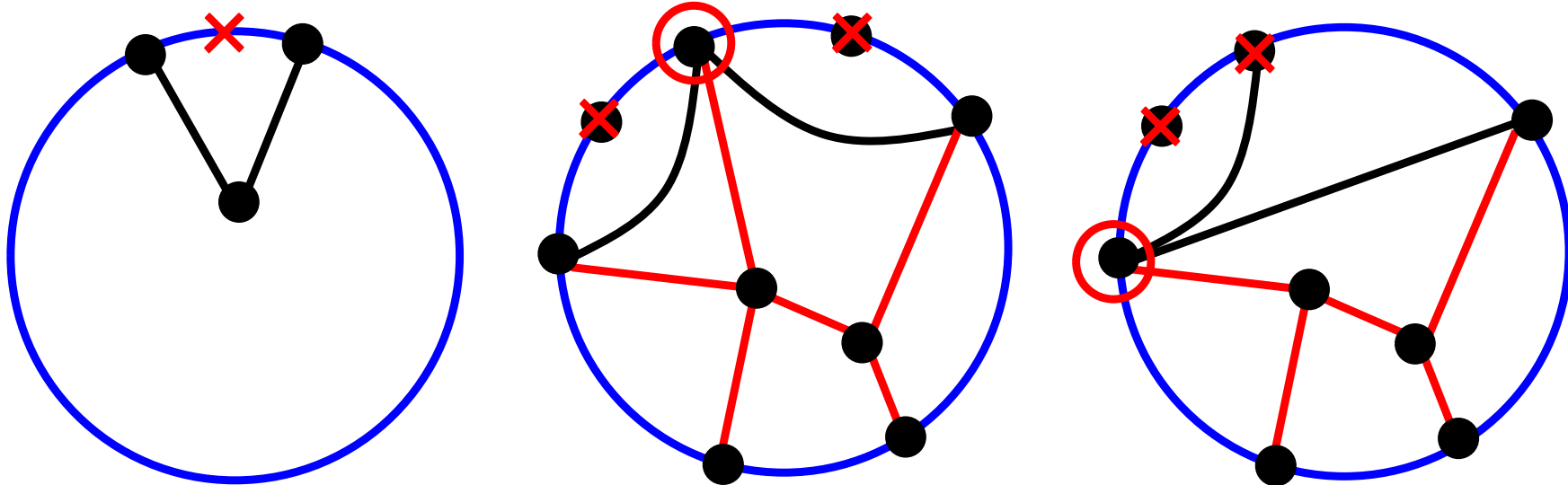




証明の概要(定理7)

定理 7 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)
頂点数が4以上のnear triangulation は**HIST**を持つ。

G : near triangulation
辺数に関する数学的帰納法





三角形分割のHIST

定理 7 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)
頂点数が4以上のnear triangulation は**HIST**を持つ.

予想 5 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)
任意の曲面の三角形分割は**HIST**を持つ.

アニュラス **OK** (Davidow et al., 1995)

トーラス **OK** (Davidow et al., 1995)

射影平面 **OK**

メビウスの帯 **OK** (Nakamoto and T, 2013)

クラインの壺 **OK** (Nakamoto and T, 2013)

平面の場合が解決





Representativity

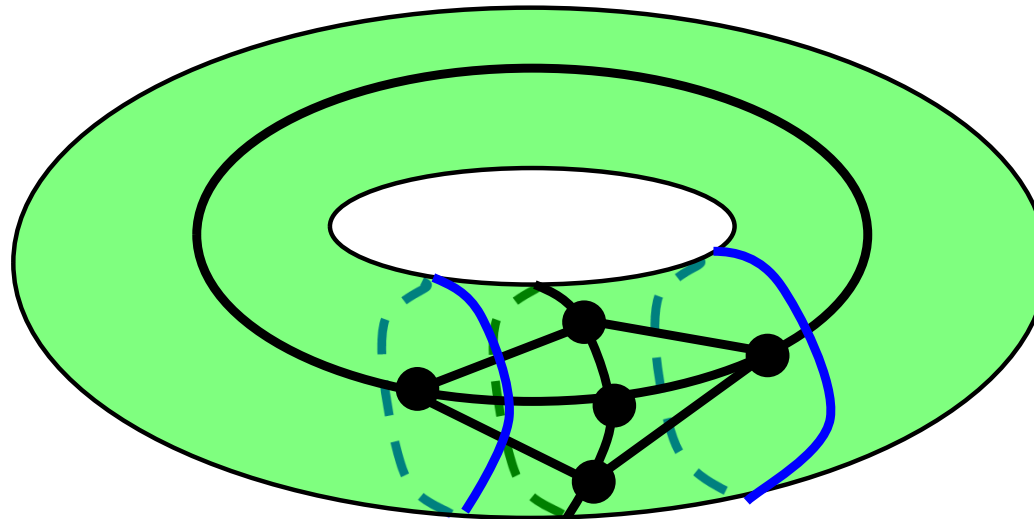
定義

G : 平面以外の曲面 F^2 に埋め込まれた単純グラフ.

C : F^2 上の任意の非可縮な単純閉曲線.

G の **representativity** $\stackrel{\text{def}}{\iff} G$ と C の交差点の最小値.

2-胞体領域を囲まない



定理 8 (Nakamoto and T, 2013)

曲面上の三角形分割は **representativity** が十分に大きければ **HIST** を持つ.



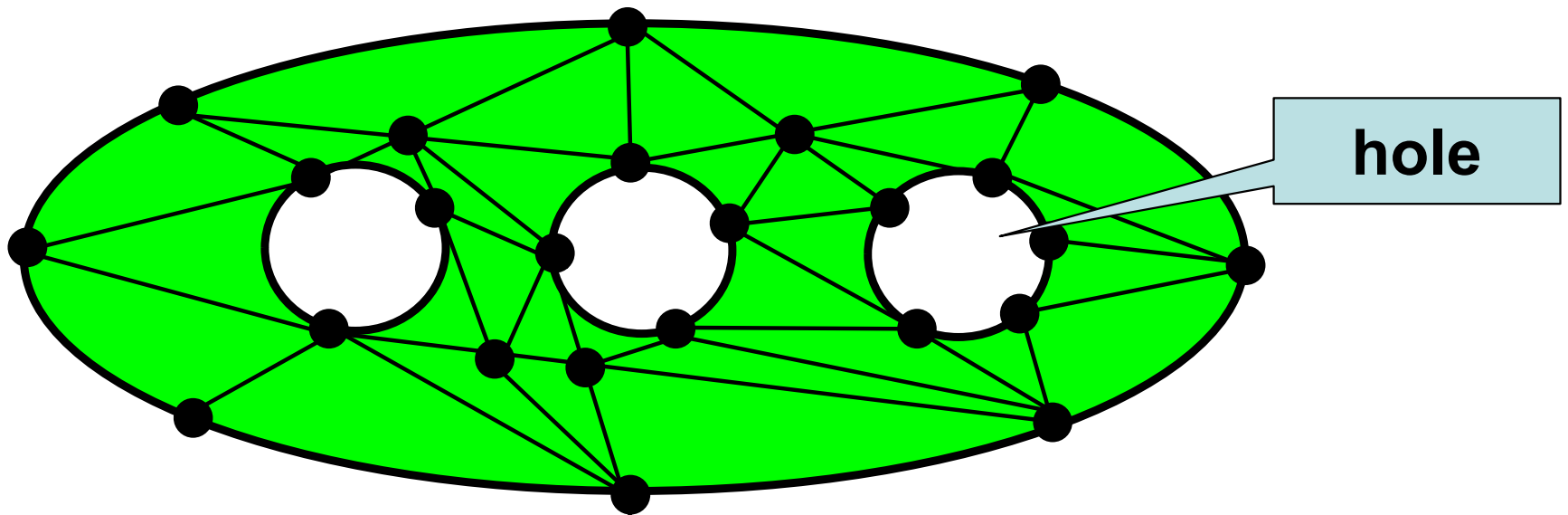
k -holed triangulation

定義

k -holed triangulation $G \stackrel{\text{def}}{\iff}$

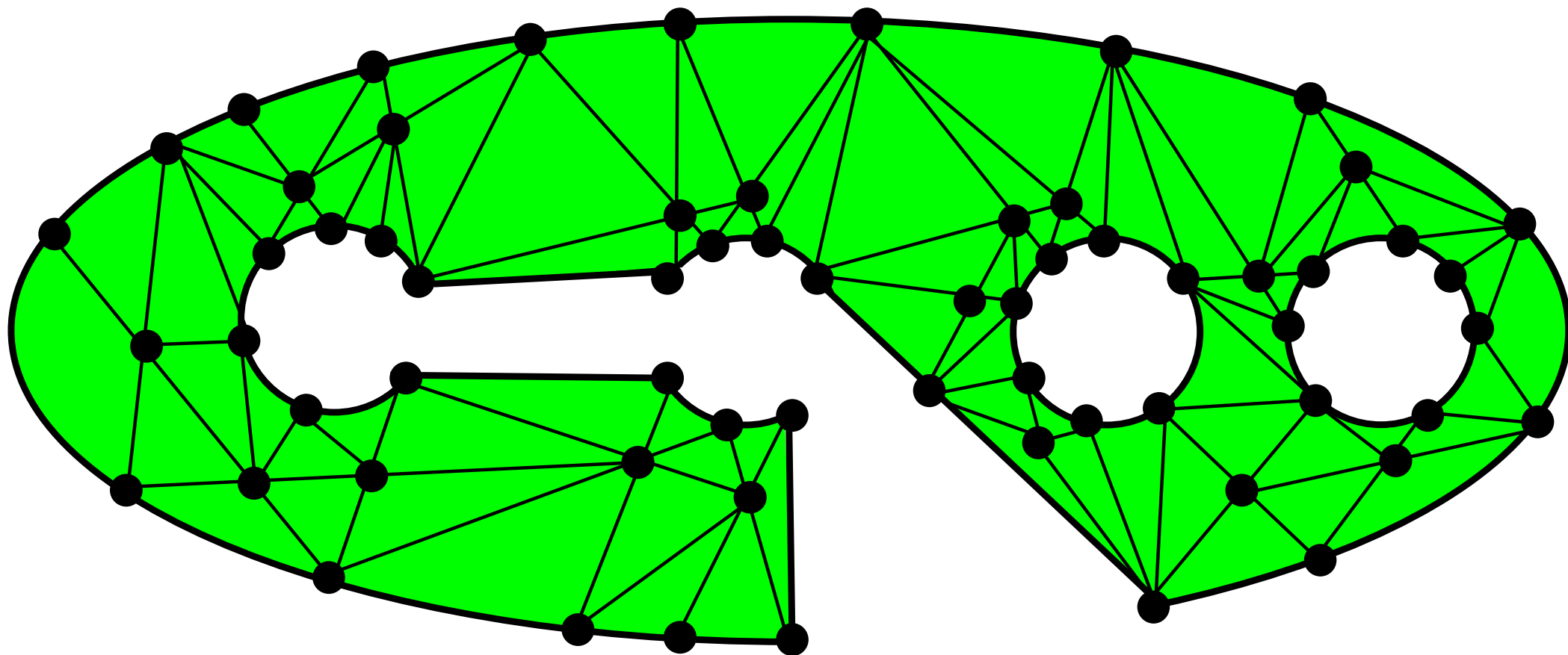
以下の条件を満たす**2-連結**平面グラフ

- (i) 点素な k 個の境界閉路を持つ,
- (ii) 内部の面(境界閉路の内側の面)が三角形.



※ **1-holed triangulation** $\iff$ **near triangulation**

証明の概要(定理8)



予想6の解決

定理 9 (Chen and Shan, 2013)

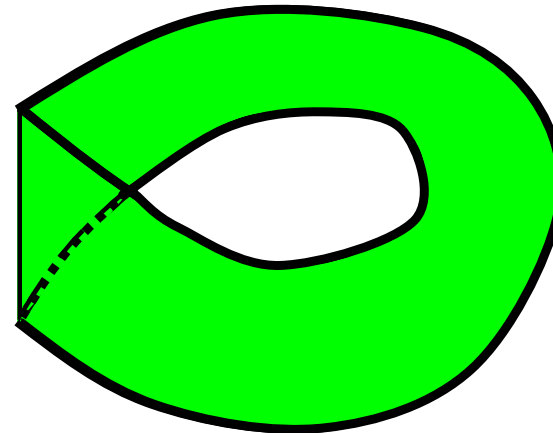
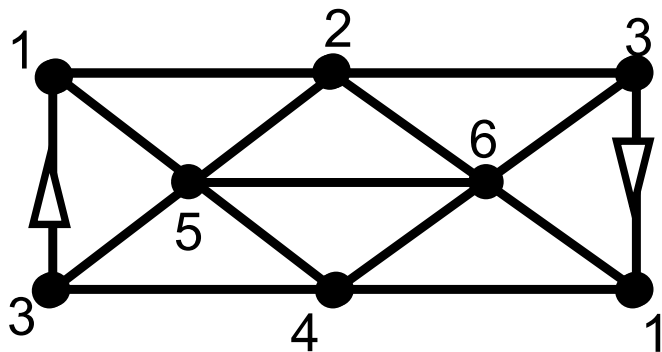
任意の辺が少なくとも2つの三角形に含まれる連結グラフは**HIST**を持つ.

予想 6 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)

任意の辺が少なくとも2つの三角形に含まれる連結グラフは**HIST**を持つ.

系 (Chen and Shan, 2013)

閉曲面上の任意の三角形分割は**HIST**を持つ.

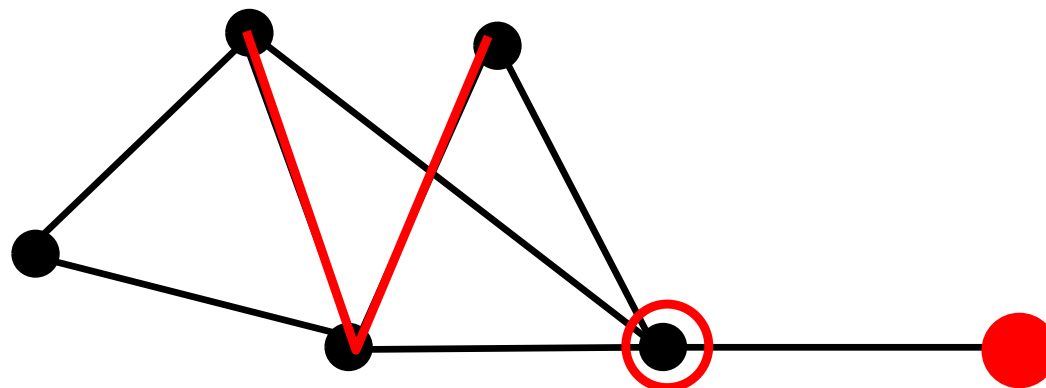
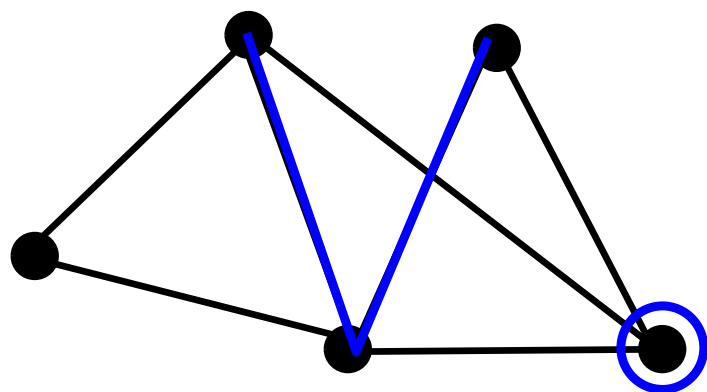




局所連結グラフとHIST

局所連結グラフ：

任意の頂点の近傍で誘導されるsubgraph が連結となるグラフ.



定理 10 (Chen, Ren and Shan, 2012)

4頂点以上の局所連結な連結グラフはHISTを持つ.

系 (Chen, Ren and Shan, 2012)

曲面上の任意の三角形分割はHISTを持つ.

予想 5 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)

任意の曲面の三角形分割はHISTを持つ.



予想5の解決

定理 8 (Nakamoto and T, 2013)

曲面上の三角形分割はrepresentativity が十分に大きければ
HISTを持つ.

定理 10 (Chen, Ren and Shan, 2012)

4頂点以上の局所連結な連結グラフはHISTを持つ.

局所連結な連結グラフ (定理10)

三角形分割 (予想5)

representativity が大きい三角形分割 (定理8)





講演内容

(1)基本用語の説明(主にtree関連)

(2)曲面上のグラフ

- ・三角形分割とHIST
- ・**平面グラフとHIST**
- ・Halin graph

(3)禁止部分グラフ

- ・HISTとその緩和
- ・Spanning Halin subgraphの存在保証

(4)直径を制限したグラフ

(5)次数条件

- ・正則グラフ
- ・最小次数条件
- ・非隣接2頂点における次数条件





平面グラフとHIST

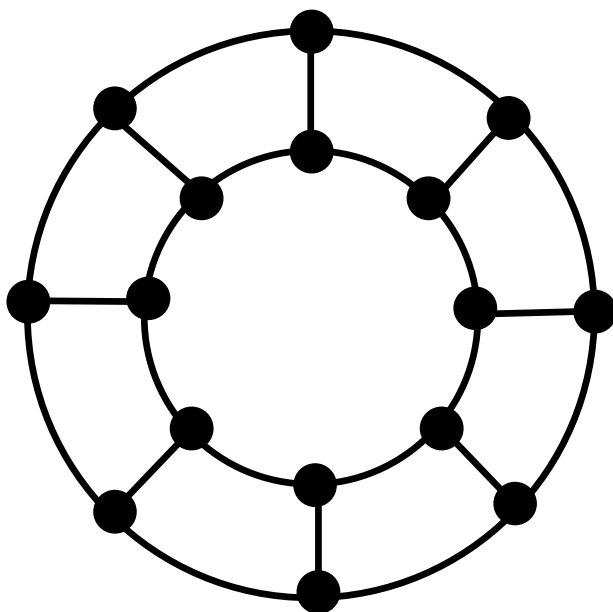
予想 1 (Malkevitch, 1978)

任意の4-連結平面グラフは**HIST**を持つ.

k -正則グラフ : 各頂点の次数が k のグラフ.

命題 11 (Joffe, 1982)

HIST を持たない**3-連結**, **4-正則**な平面グラフの無限系列が存在する.



最近, Goedgebeur et al.
が別の例を構成

$$K_2 \square C_n (n \geq 4)$$



平面グラフとHIST

予想 1 (Malkevitch, 1978)
任意の4-連結平面グラフは**HIST**を持つ.

局所連結な連結グラフ (定理10)

三角形分割 (予想5)

3-連結平面グラフ

3-連結平面グラフ, かつ性質P

4連結平面グラフ (予想1)



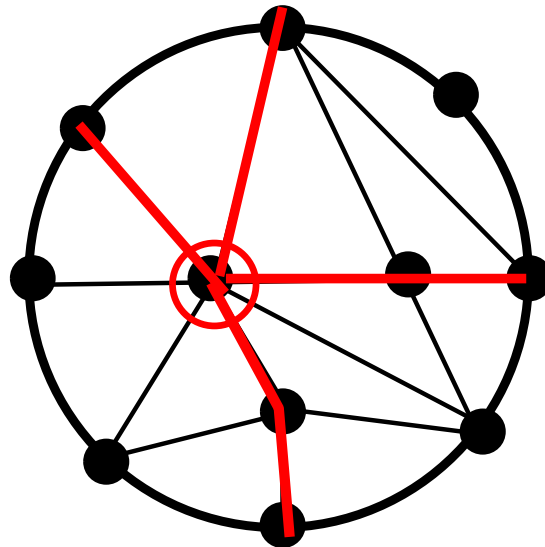
Internally k -connected

定義

G : 境界閉路 C を持つ平面グラフ.

v : $V(G) - V(C)$ の頂点.

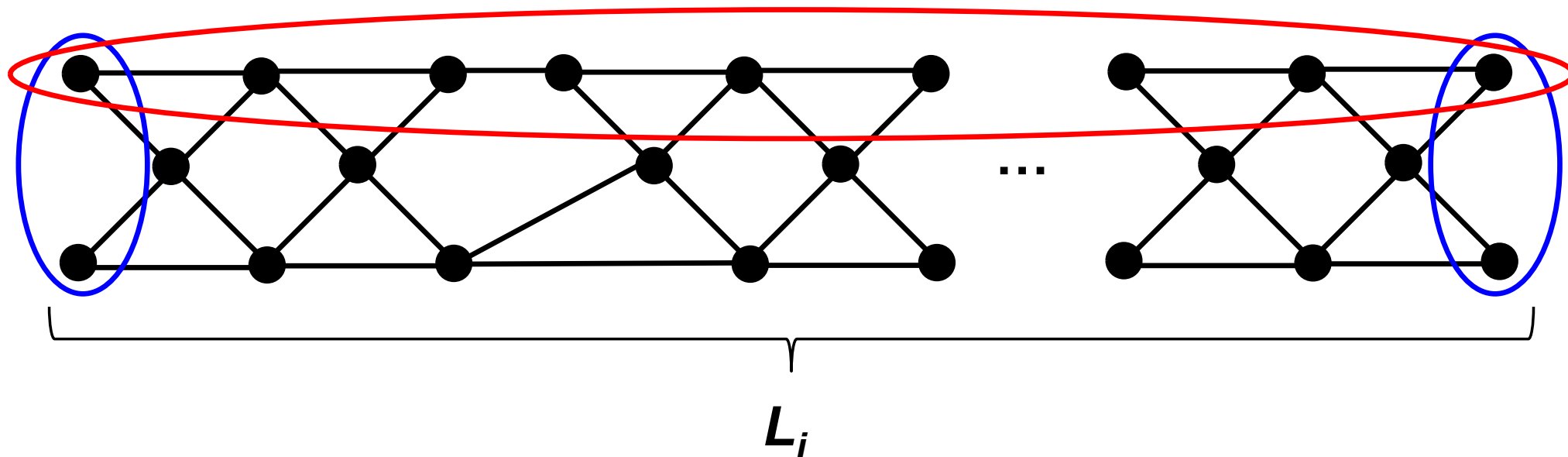
G は **internally k -connected** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$
 G は v から $V(C)$ への disjoint な k 本の path を持つ.



平面グラフとHIST

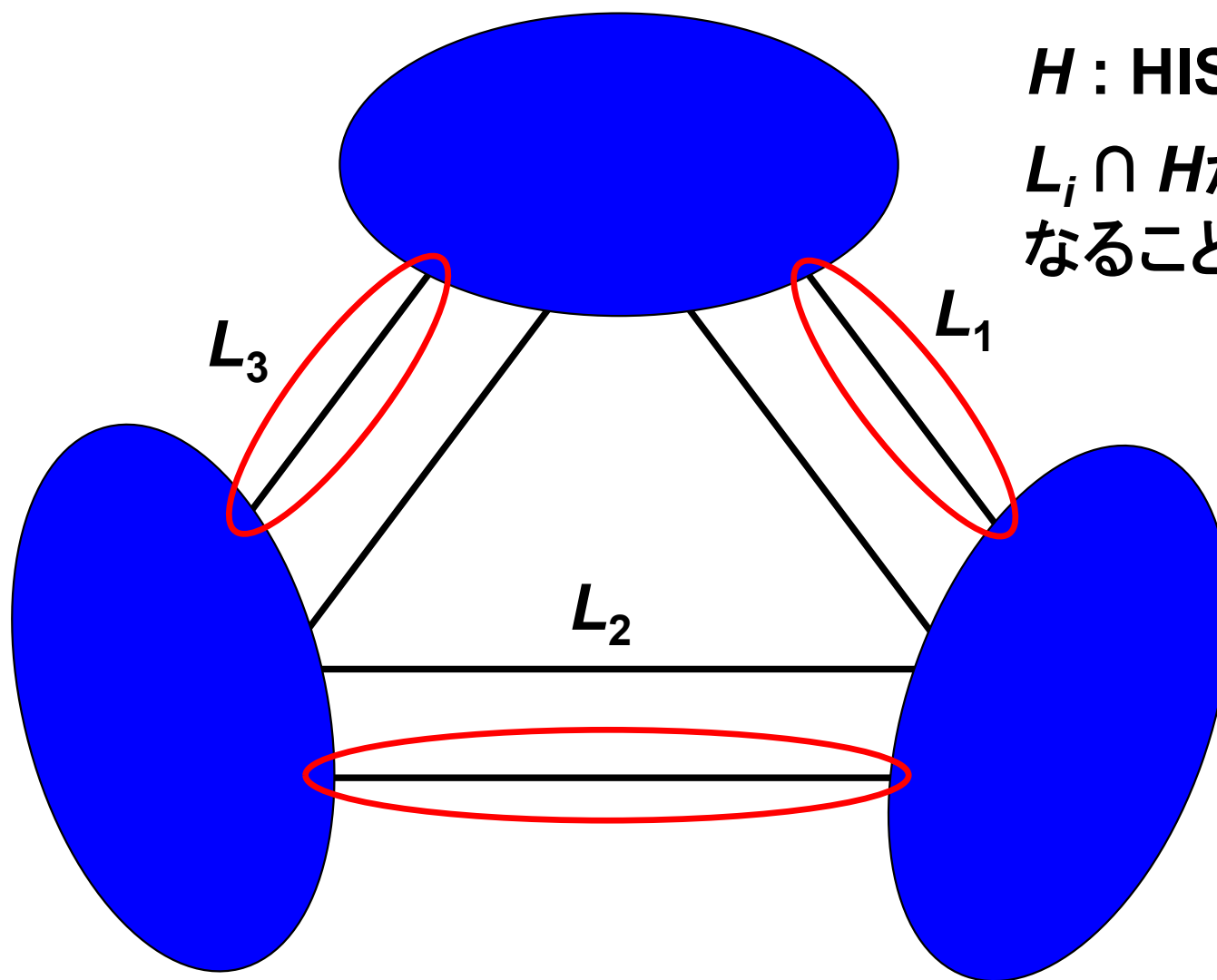
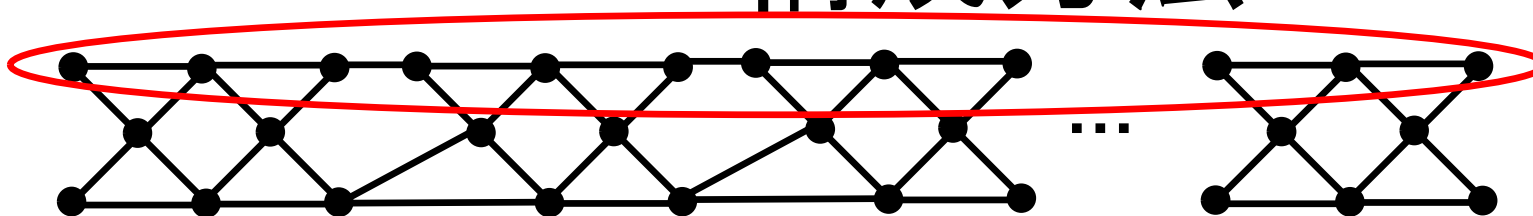
定理 12 (Nomura and T, 2018)

HISTを持たない**3-連結**, **internally 4-conn.** な
平面グラフの無限系列が存在する.





構成方法



H : HIST

$L_i \cap H$ が非連結になることが示せる.



essentially k -connected

定義

グラフ G は **essentially k -connected** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の k 点未満の頂点集合 X について, $G - X$ の辺を持つ連結成分は高々1つ.

定理 13 (Nomura and T, 2018)

HIST を持たない **3-連結**, **essentially 4-conn.** な平面グラフの無限系列が存在する.





予想1の部分的解決

定義

グラフ G は **cyclically k -edge connected** def
任意の k 本未満の辺集合 E について, $G - E$ の
連結成分で閉路を含むものが高々1つ.

定理 14 (Goedgebeur, Noguchi, Renders and Zamfirescu, 2024+)
cyclically 4-edge connected, **3-正則** な平面グラフ
のライングラフは HIST を持つ.

4-連結, 4-正則な平面グラフ

命題 15 (Goedgebeur, Noguchi, Renders and Zamfirescu, 2024+)
22頂点以下の4-連結平面グラフは **HIST** を持つ.



HIST-critical

定義

グラフ G は **HIST-critical** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- ・ G は HIST を持たない, かつ
- ・ 任意の頂点 v について $G - v$ は HIST を持つ.

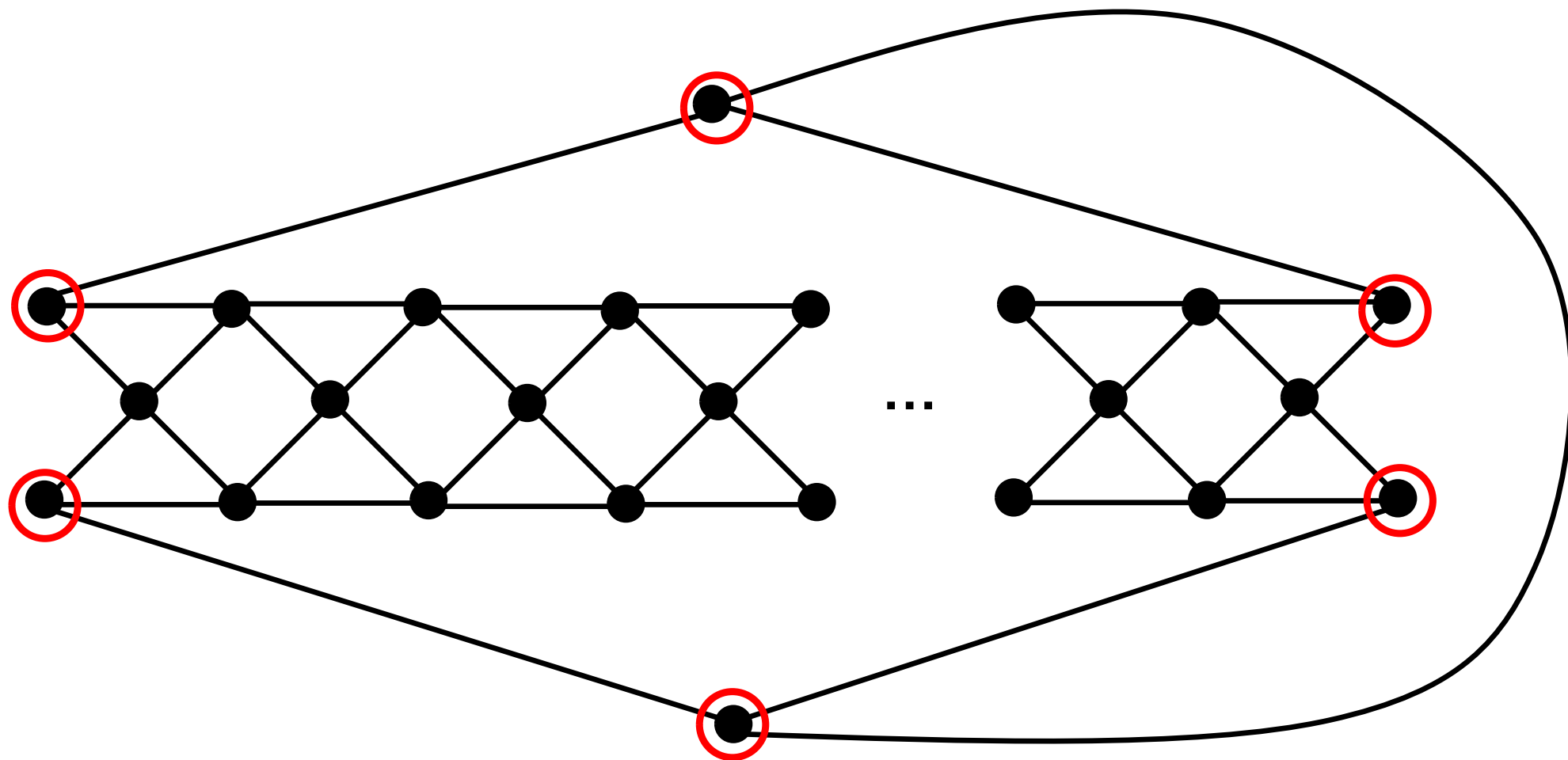
定理 16 (Goedgebeur, Noguchi, Renders and Zamfirescu, 2024+)

HIST-critical な **3-連結** 平面グラフの無限系列が存在する.





HIST-criticalな平面グラフ





考察

定義

グラフ G は **HIST-critical** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

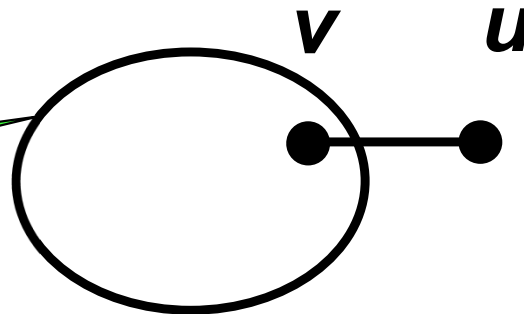
- ・ G は HIST を持たない, かつ
- ・ 任意の頂点 v について $G - v$ は HIST を持つ.

$|G| - 1$ 頂点の HIST を持つ

任意の頂点 v について,
 v が 次数 2 の near HIST を持つ

near HIST : 次数 2 の頂点が高々 1 つの spanning tree.

$G - u$ は v が 次数 1
の HIST を持つ



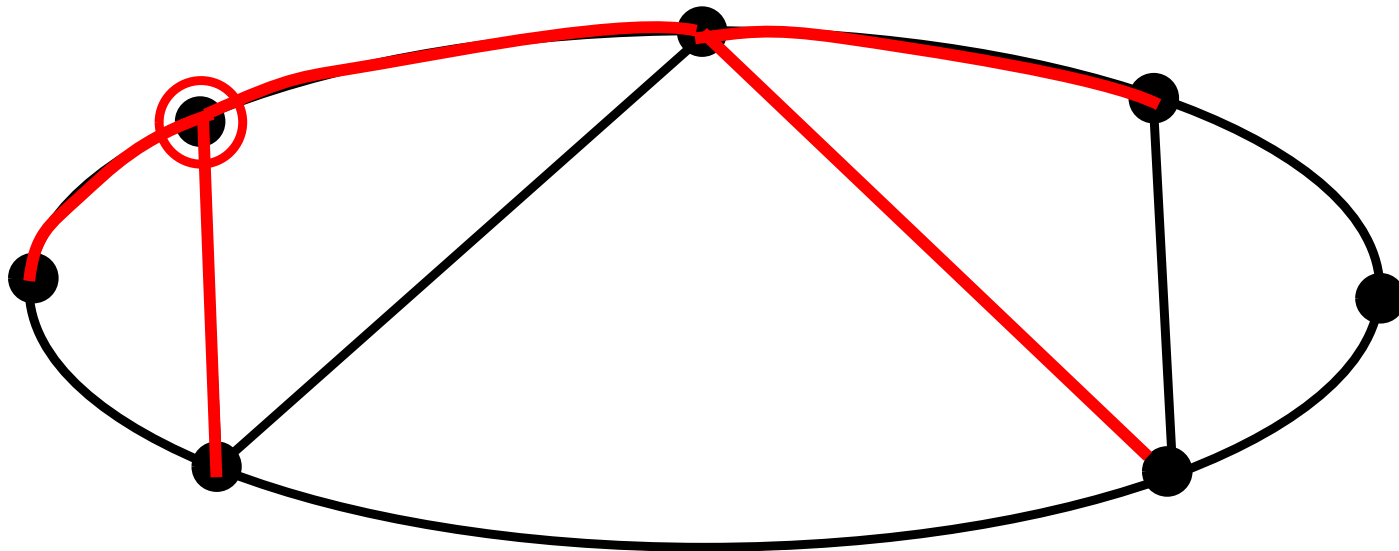


指定点が次数1でないHIST

定理 17 (T, 2016)

G : **near triangulation**, $|G|$: G の頂点数.

- (i) $|G|=2n-1 \Rightarrow$ 任意の頂点 v について G は v の次数が2以上, かつその他の頂点の次数が2でない **near HIST** を持つ,
- (ii) $|G|=2n \Rightarrow$ 任意の次数3以上の頂点 v について G は v の次数が3以上の **HIST** を持つ. ($n \geq 2$)





指定点が次数1でないHIST

G : グラフ.

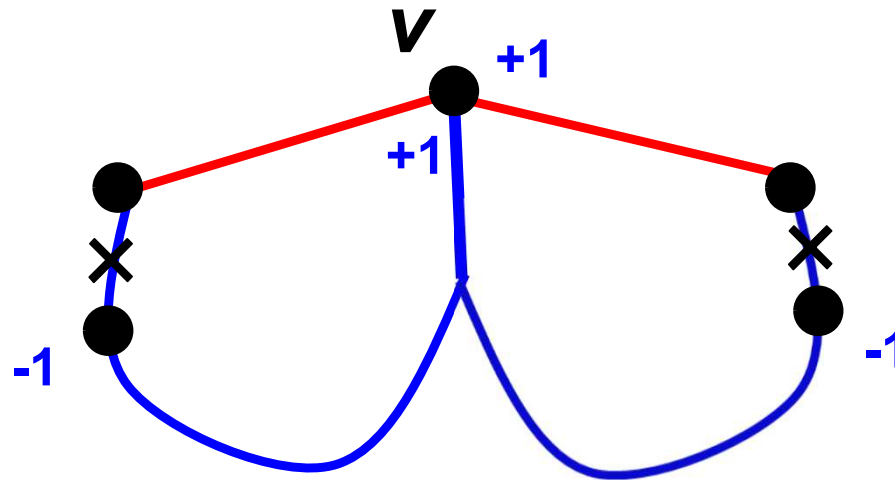
G は $[2, 2k]$ -ST を持つ $\Rightarrow$

任意の次数 k 以上の頂点 v について

G は v の次数が k 以上の $[2, k]$ -ST を持つ.

(Furuya and T, 2013)

※ $\exists [2, 4]$ -ST $\Rightarrow$ 指定点が次数3以上の $\exists$ HIST.





講演内容

(1)基本用語の説明(主にtree関連)

(2)曲面上のグラフ

- ・三角形分割とHIST
- ・平面グラフとHIST
- ・**Halin graph**

(3)禁止部分グラフ

- ・HISTとその緩和
- ・Spanning Halin subgraphの存在保証

(4)直径を制限したグラフ

(5)次数条件

- ・正則グラフ
- ・最小次数条件
- ・非隣接2頂点における次数条件





予想5の解決

定理 8 (Nakamoto and T, 2013)

曲面上の三角形分割はrepresentativity が十分に大きければ
HISTを持つ.

定理 10 (Chen, Ren and Shan, 2012)

4頂点以上の局所連結な連結グラフはHISTを持つ.

局所連結な連結グラフ (定理10)

三角形分割 (予想5)

representativity が大きい三角形分割 (定理8)





Spanning Halin subgraph

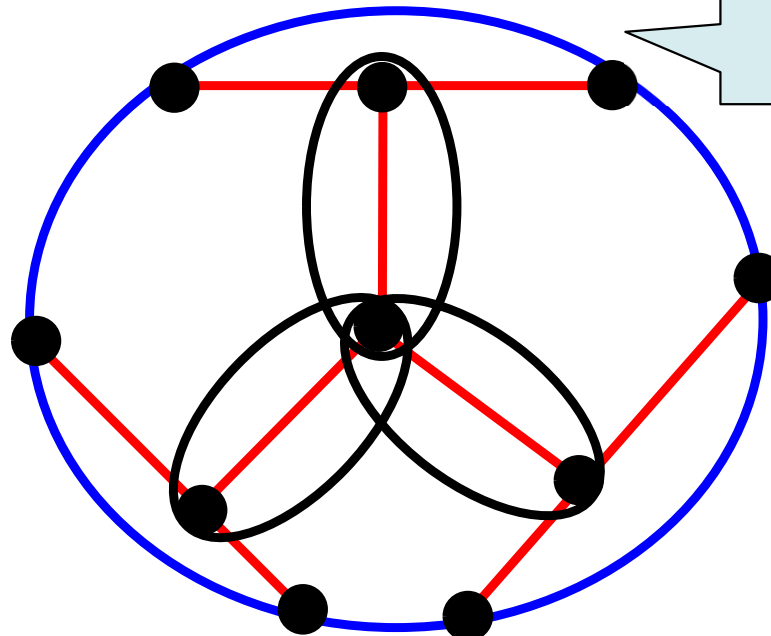
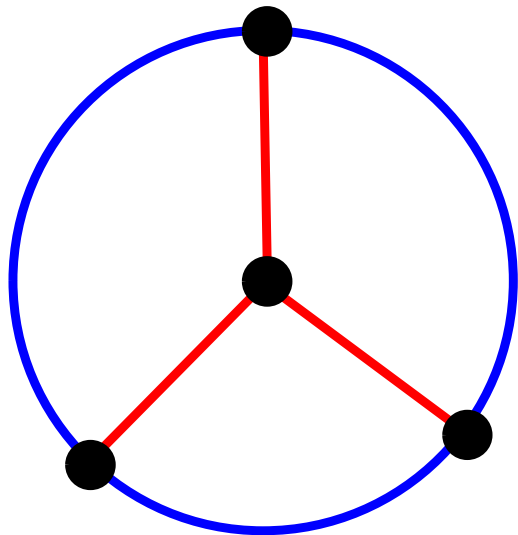
予想 18 (Lovász and Plummer, 1975)

任意の4-連結平面三角形分割はspanning Halin subgraphを持つ.

Halin graph H :

以下の条件を満たす4点以上の平面グラフ $T \cup C$

- (i) T は H の **HIST** ,
- (ii) C は T の次数1の頂点を通る閉路, かつ
- (iii) T と C は辺素.



辺極小な
3-連結平面グラフ



Halin graphの応用

定理 19 (Cornuéjols, Naddef and Pulleyblank, 1983)
Halin graph 上のTraveling Salesman Problemを解く
多項式時間アルゴリズムが存在する.

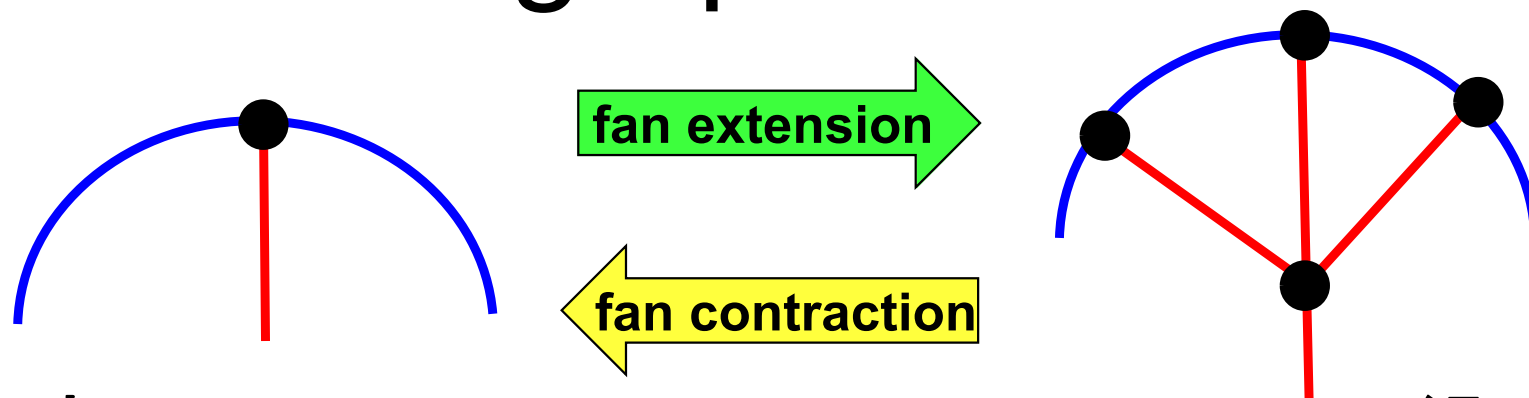
定理 20 (Winter, 1986)
Halin graph 上のSteiner Problemを解く
線形時間アルゴリズムが存在する.

Chang, Wang, Tsai, Yang (2012) は,
Halin graphを用いて, エネルギーコストを抑えた
Wireless Sensor Networkの構築法を提案.

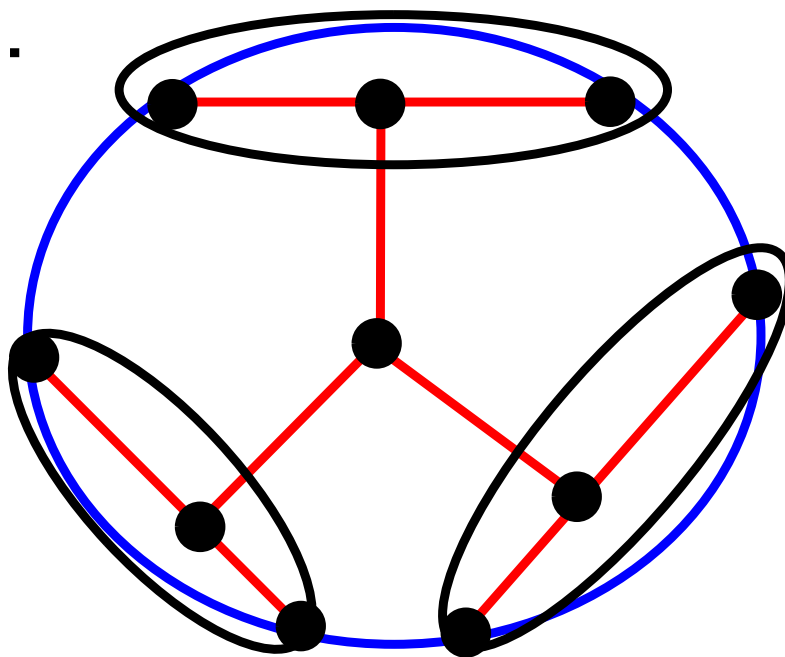
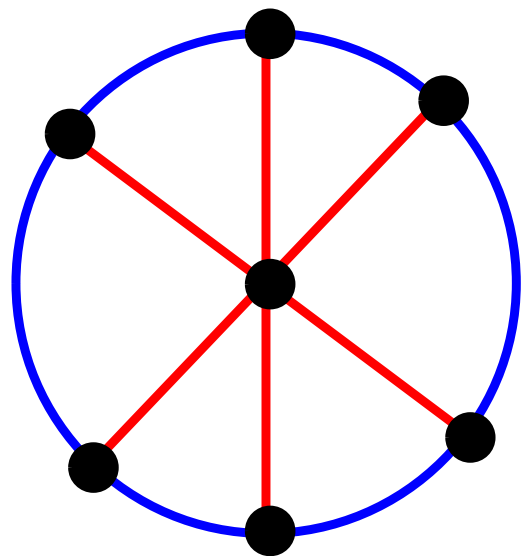




Halin graphの生成定理



- ・任意の**Halin graph**はfan contractionの繰り返しでwheelに変形できる.
- ・任意の**Halin graph**はwheelからfan extensionの繰り返しで得られる.





Halin graphの性質

定理 21 (Bondy, 1973)

任意の **Halin graph** は**ハミルトン閉路**を持つ.

定理 22 (Barefoot, 1987)

任意の **Halin graph** は**Hamilton connected**.

任意の2頂点を端点とする
ハミルトン道が存在.

定理 23 (Skupień, 1990)

任意の **Halin graph** は**uniformly Hamiltonian**.

任意の辺について, その辺を通るハミルトン閉路
と通らないハミルトン閉路が存在.



グラフの性質の強弱関係

$\exists$ spanning Halin subgraph

Hamilton connected

uniformly Hamiltonian

1-edge Hamiltonian

$\exists$ ハミルトン閉路

$\exists$ Dominating cycle

$\exists$ 2-factor

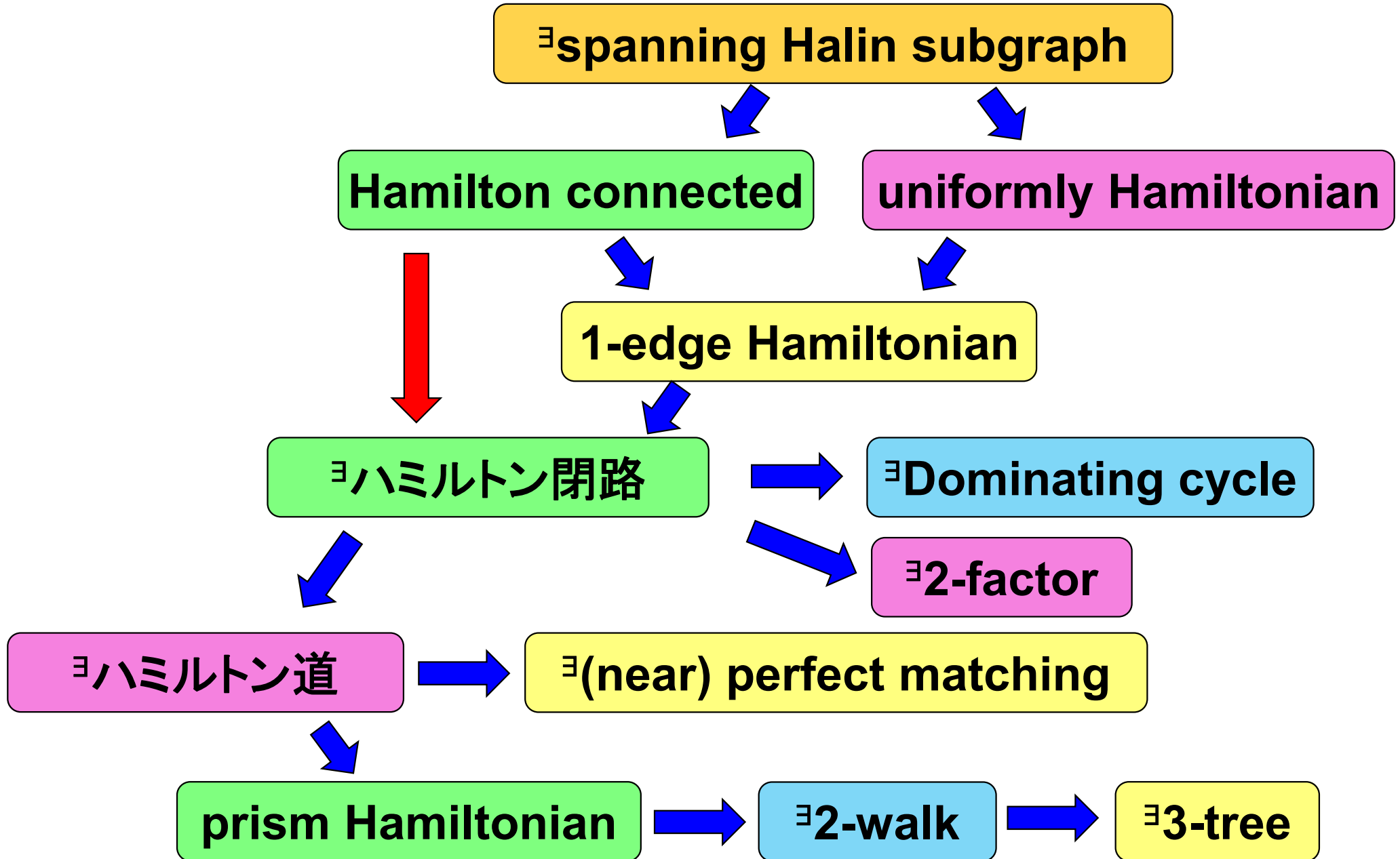
$\exists$ ハミルトン道

$\exists$ (near) perfect matching

prism Hamiltonian

$\exists$ 2-walk

$\exists$ 3-tree





問題

問題

Spanning Halin subgraph (span. Halin sub.)
を持つ自明でないグラフクラスを特定せよ.

NP-完全 (Horton et al., 1992)





Span. Halin sub.を持つための必要条件

G : 単純グラフ

G が **spanning Halin subgraph** を持つ $\Rightarrow$

- (i) G は **HIST** を持つ, かつ
- (ii) G は **Hamilton connected**.

系 (Chen, Ren and Shan, 2012)

曲面上の任意の三角形分割は **HIST** を持つ.

定理 24 (Thomassen, 1983)

4-連結平面グラフ は **Hamilton connected**.

4-連結平面三角形分割 は span. Halin sub. を持つための必要条件を満たす.





予想18の反証

予想 18 (Lovász and Plummer, 1975)

任意の4-連結平面三角形分割はspanning Halin subgraphを持つ.

定理 25 (Chen, Enomoto, Ozeki and T, 2015)

Span. Halin sub. を持たない4-連結平面三角形分割の無限系列が存在する.

定理 26 (Chen, Enomoto, Ozeki and T, 2017)

Span. Halin sub. を持たない5-連結平面三角形分割の無限系列が存在する.

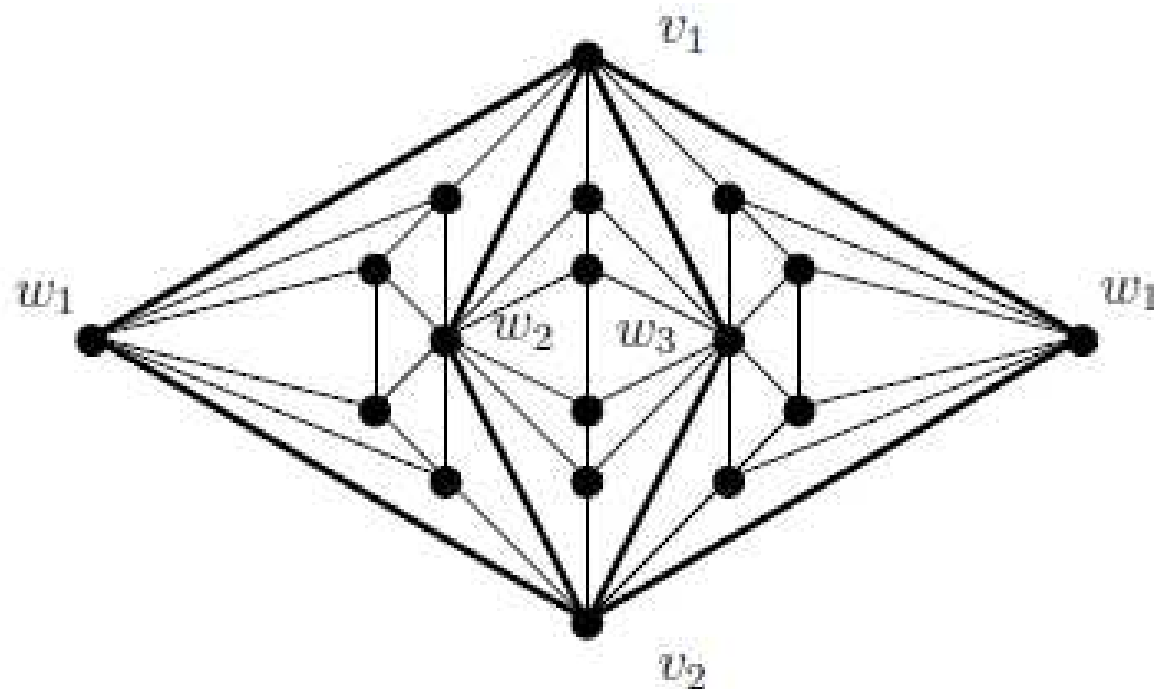
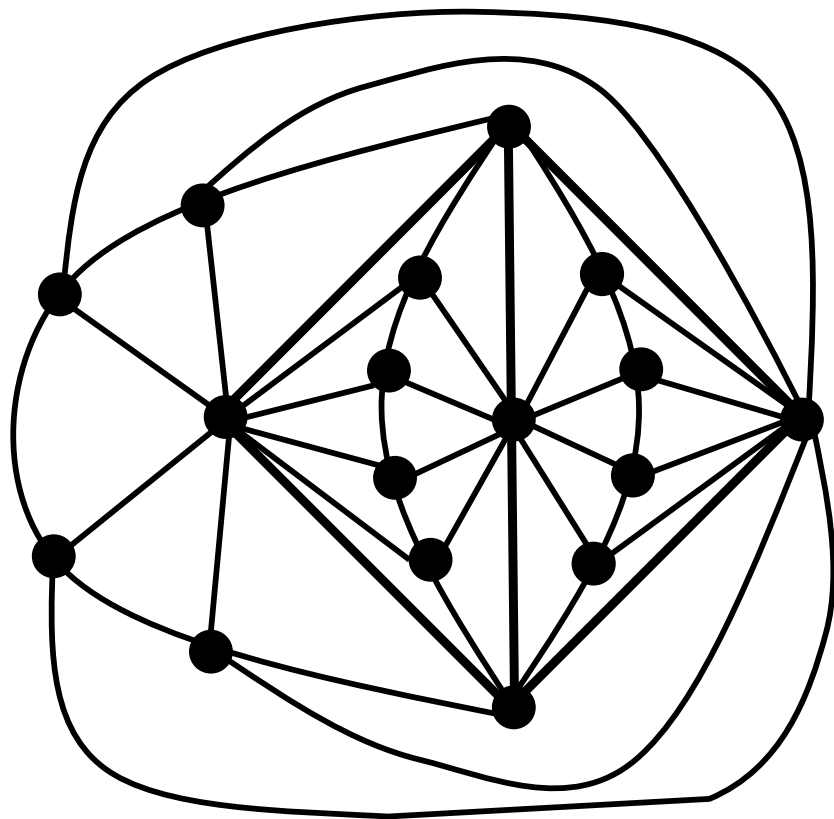




構成方法 (4-連結)

定理 25 (Chen, Enomoto, Ozeki and T, 2015)

Span. Halin sub. を持たない**4-連結平面三角形分割**の無限系列が存在する.

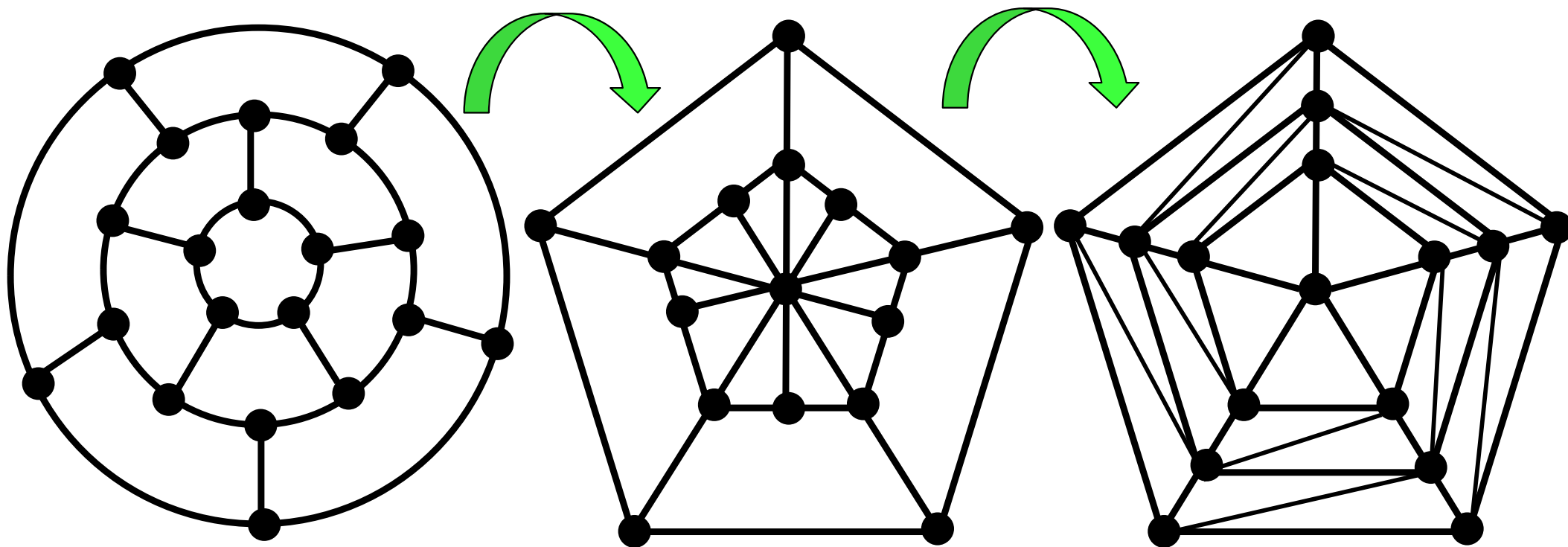




構成方法 (5-連結)

定理 26 (Chen, Enomoto, Ozeki and T, 2017)

Span. Halin sub. を持たない**5-連結平面三角形分割**の無限系列が存在する.





Span. Halin sub. の必要条件(平面グラフ)

領域B

領域A

Halin graphの
外側の閉路

G : 平面グラフ.

G は **spanning Halin subgraph** を持つ

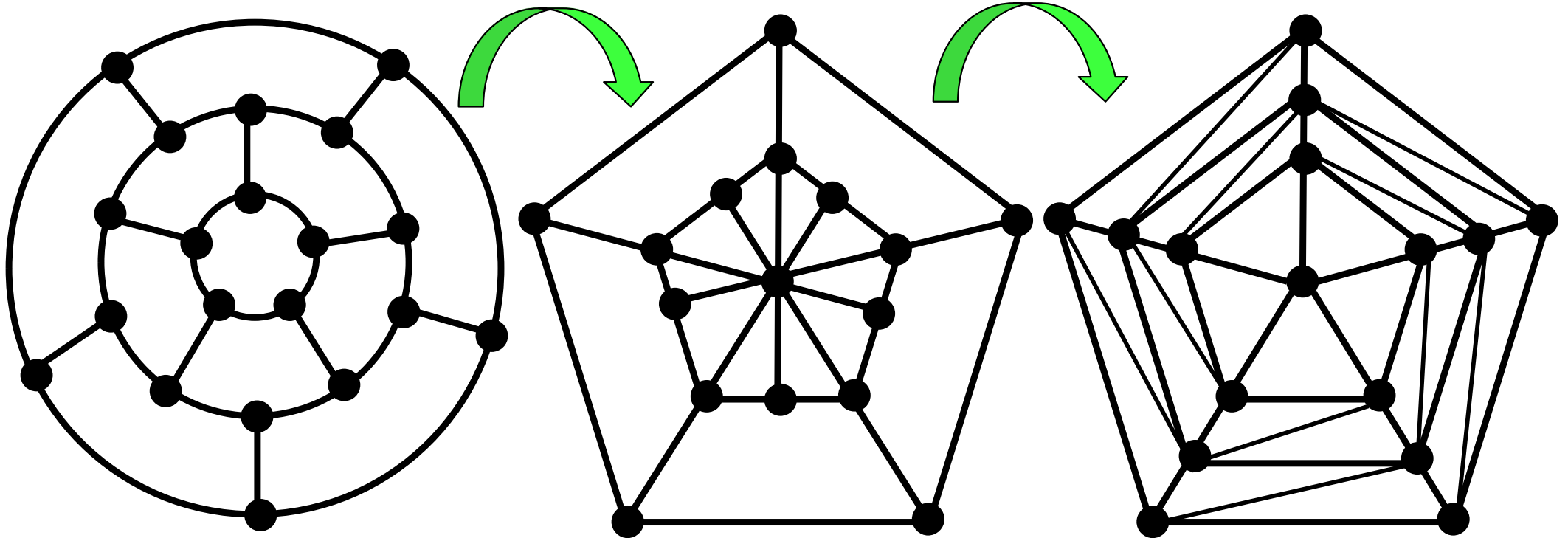
$\Rightarrow G$ は以下の条件を満たす閉路 C を持つ;

- (i) **領域A** の内部に C の頂点同士を結ぶ辺が無い,
- (ii) **領域B** の内部に頂点はない,
- (iii) C 上の各頂点は $G - C$ の少なくとも1点に接続, かつ
- (iv) C の長さは $(|G|+2)/2$ 以上.



証明の概要(定理26)

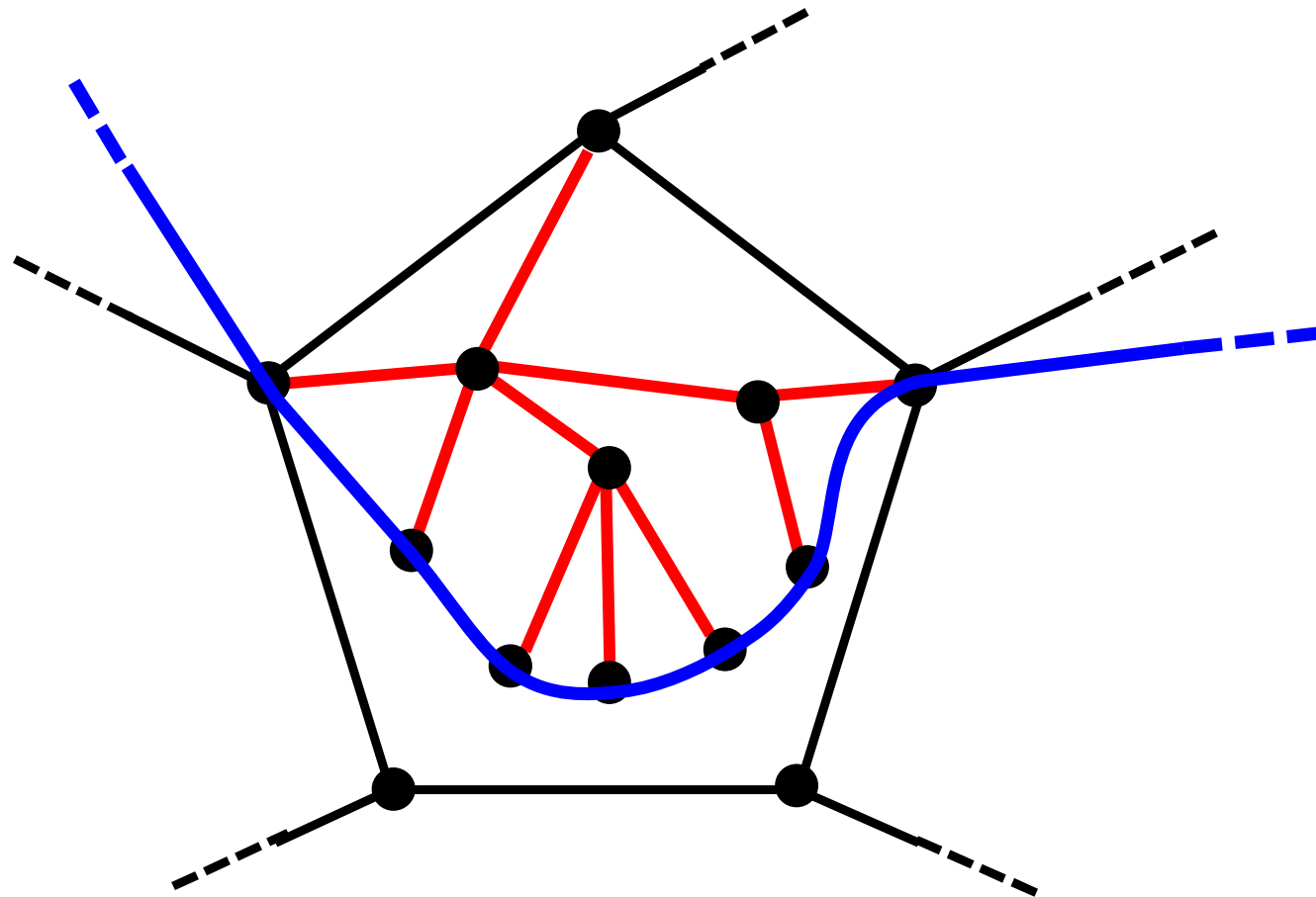
(矛盾を導くため) G がspan. Halin sub. $H = \textcolor{red}{T} \cup \textcolor{blue}{C}$ を持つとする.





証明の概要(定理26)

(矛盾を導くため) G が span. Halin sub. $H = T \cup C$ を持つとする.

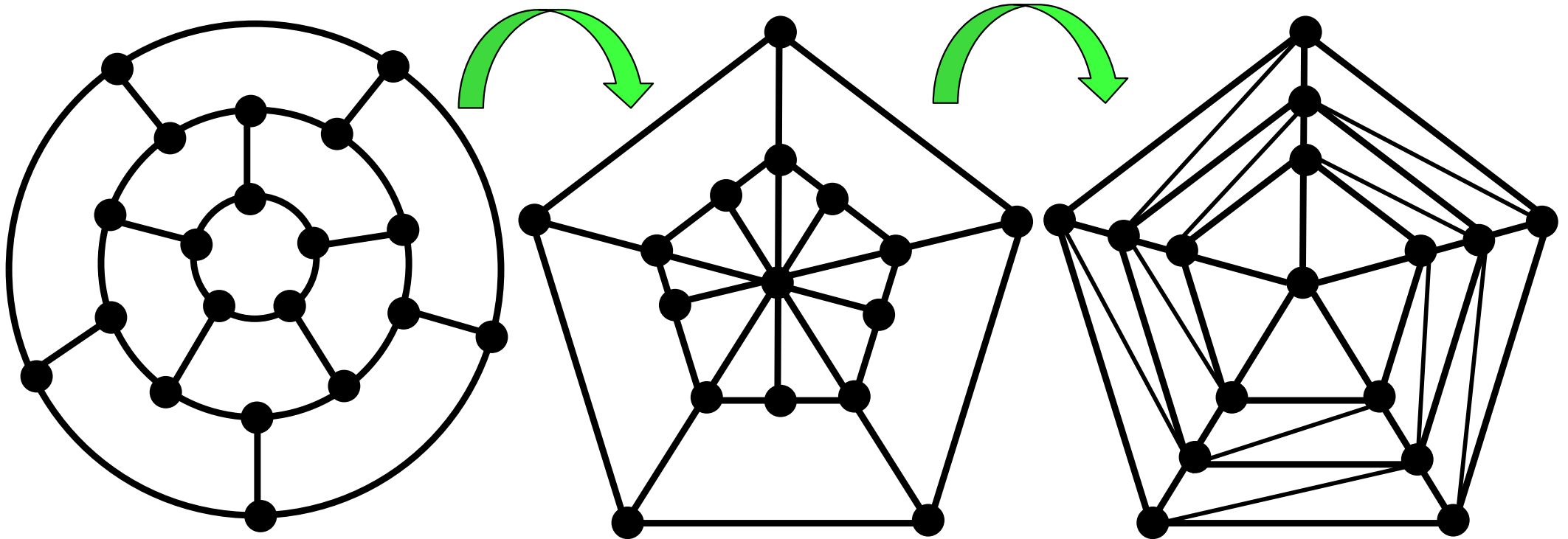




証明の概要(定理26)

(矛盾を導くため) G がspan. Halin sub. $H = \textcolor{red}{T} \cup \textcolor{blue}{C}$ を持つとする.

各五角形領域の内部について, $\textcolor{blue}{C}$ のとおり方を考える.

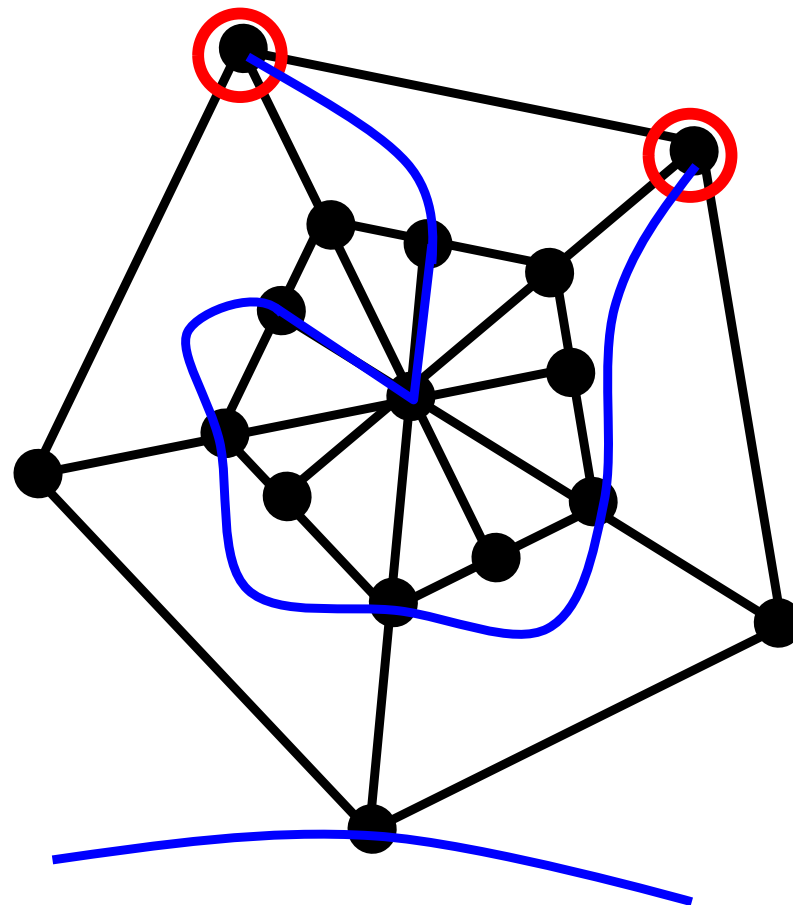
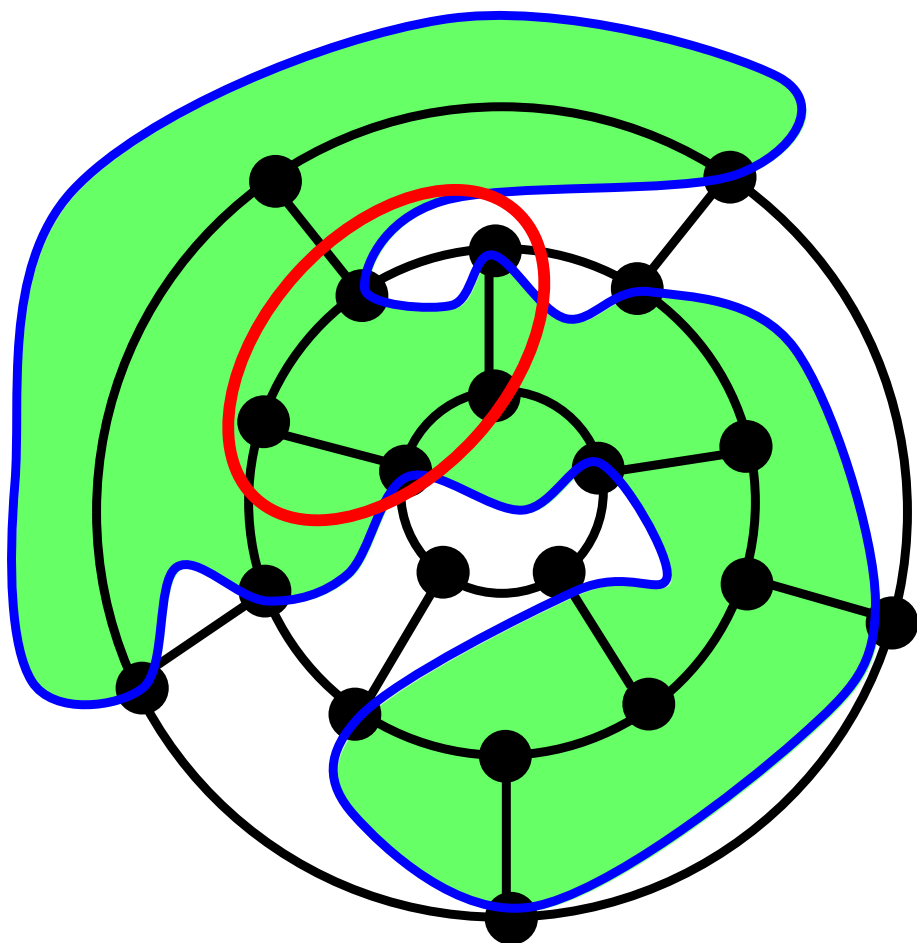




証明の概要(定理26)

(矛盾を導くため) G が span. Halin sub. $H = T \cup C$ を持つとする.

各五角形領域の内部について, C のとおり方を考える.

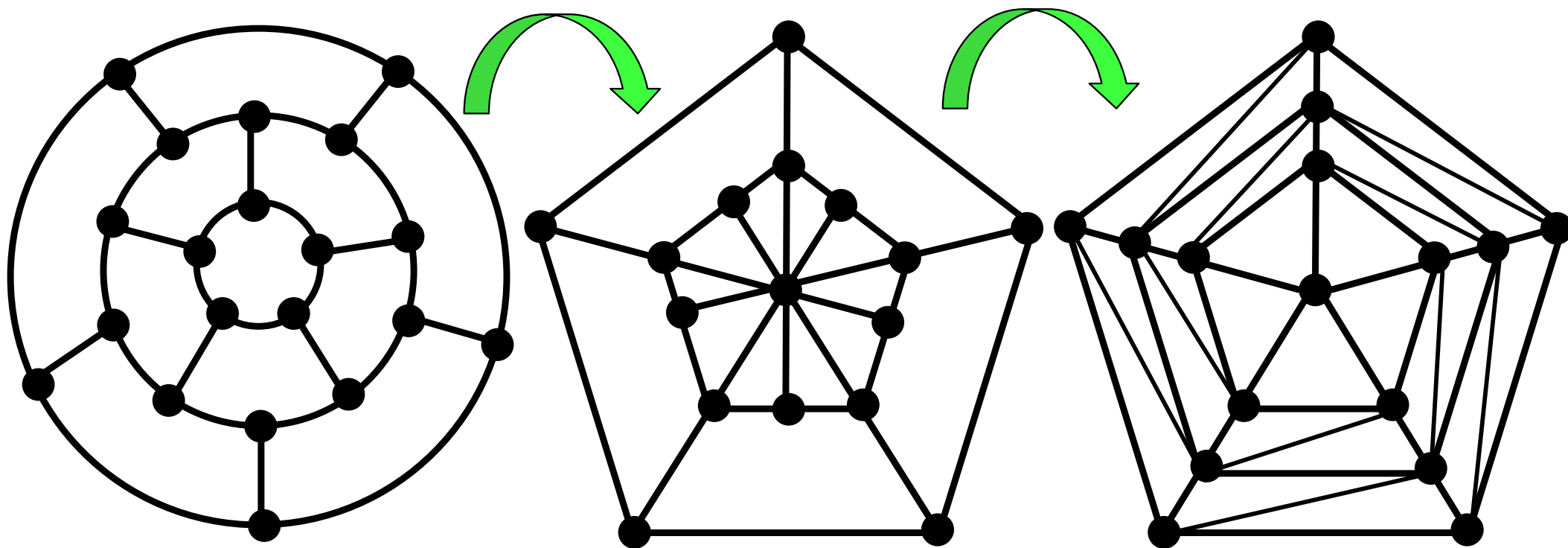




構成方法 (5-連結)

定理 26 (Chen, Enomoto, Ozeki and T, 2017)

Span. Halin sub. を持たない**5-連結平面三角形分割**の無限系列が存在する.





講演内容

- (1)基本用語の説明(主にtree関連)
- (2)曲面上のグラフ
 - ・三角形分割とHIST
 - ・平面グラフとHIST
 - ・Halin graph
- (3)禁止部分グラフ**
 - ・**HISTとその緩和**
 - ・Spanning Halin subgraphの存在保証
- (4)直径を制限したグラフ
- (5)次数条件
 - ・正則グラフ
 - ・最小次数条件
 - ・非隣接2頂点における次数条件

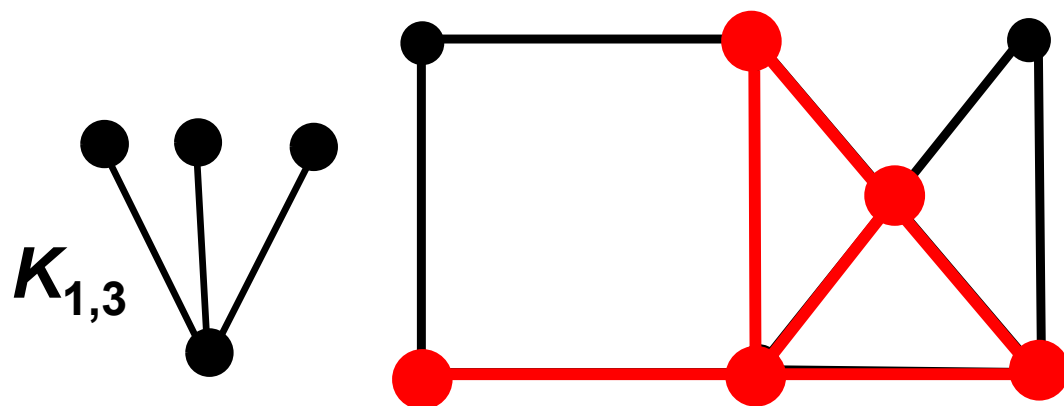




$\mathcal{H}$ -free graph

定義 $\mathcal{H}$: 連結グラフの族, G : グラフ.

G が $\mathcal{H}$ -free $\stackrel{\text{def}}{\iff} G$ が $\forall H \in \mathcal{H}$ を誘導部分グラフとして含まない.



$K_{1,3}$ -freeでない

$K_{1,4}$ -freeである

$$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2 \stackrel{\text{def}}{\iff}$$

$\forall H_2 \in \mathcal{H}_2, \exists H_1 \in \mathcal{H}_1$ s.t. H_1 が H_2 の誘導部分グラフである.

命題 27

G : 連結グラフ, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$: 連結グラフの族.

G が $\mathcal{H}_1$ -free かつ $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2 \Rightarrow G$ は $\mathcal{H}_2$ -free.

$\mathcal{H}_2$ -free graph

$\mathcal{H}_1$ -free graph

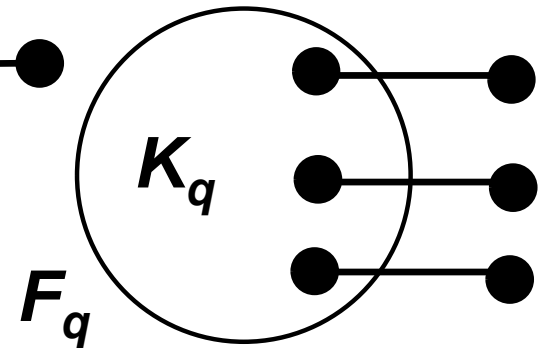
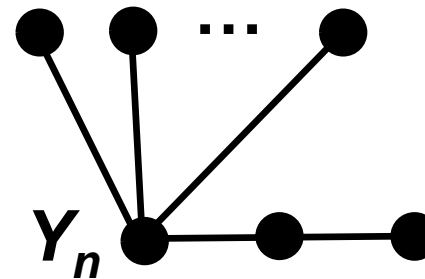
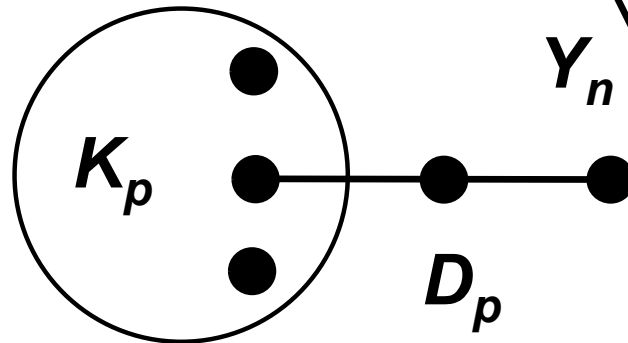
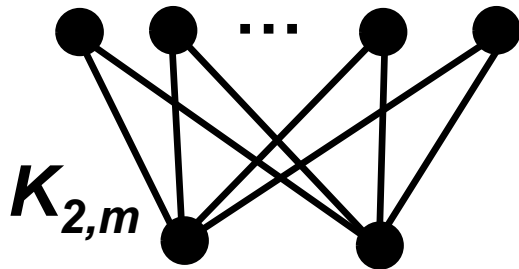
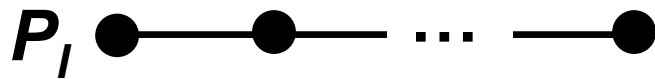
禁止部分グラフとHIST

定理 28 (Furuya and T, 2013)

$\mathcal{H}$: 連結グラフの族.

ある整数 l が存在し, 頂点数が l 以上の任意の
連結 $\mathcal{H}$ -free graph が HIST を持つ

$\Leftrightarrow \mathcal{H} \subseteq \{P_l, K_{2,m}, Y_n, D_p, F_q\}$ (l, m, n, p, q は整数).



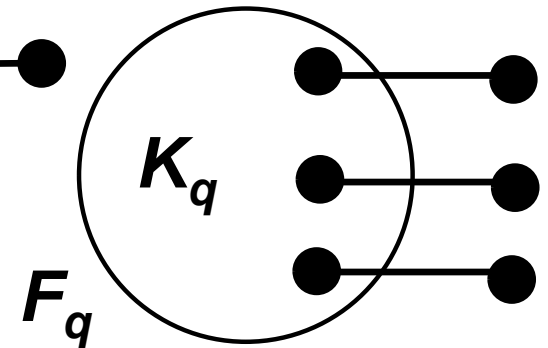
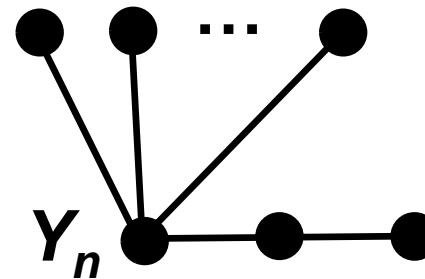
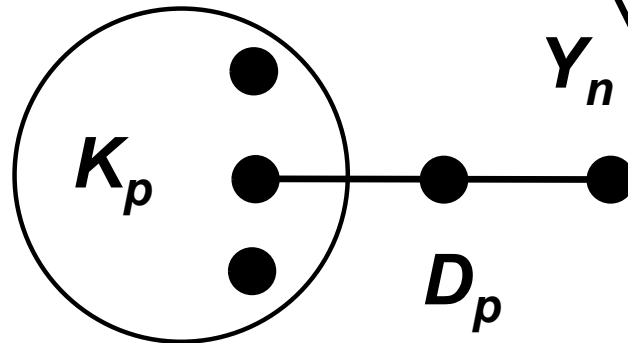
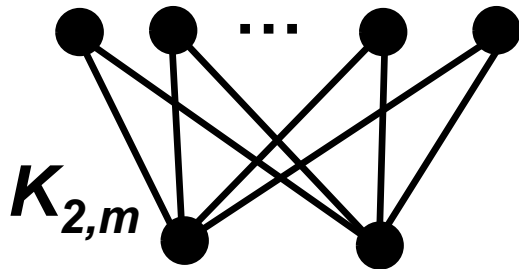
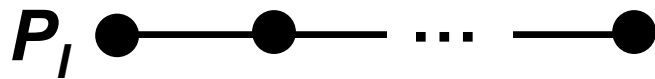
禁止部分グラフと $[2,k]$ -ST

定理 28' (Furuya and T, 2013)

$\mathcal{H}$: 連結グラフの族.

ある整数 l が存在し, 頂点数が l 以上の任意の
連結 $\mathcal{H}$ -free graph が $[2,k]$ -ST を持つ

$\Leftrightarrow \mathcal{H} \subseteq \{P_l, K_{2,m}, Y_n, D_p, F_q\}$ (l, m, n, p, q は整数).



P_4 -free graph

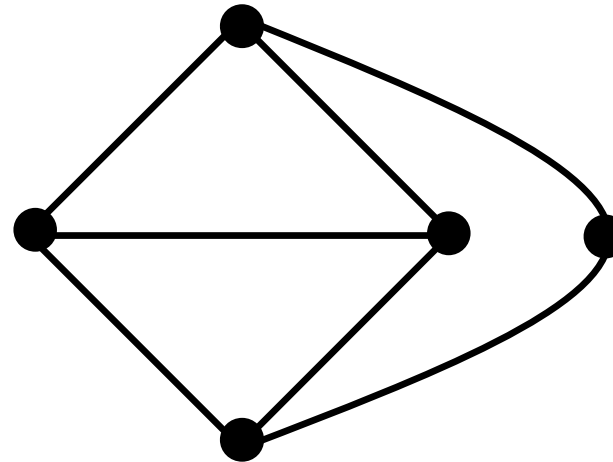
定理 29 (Furuya and T, 2013)

G : 連結な P_4 -free graph, $|G| \geq 4$.

G が **HIST** を持つ $\Leftrightarrow$

G は $K_{2,n}$ や 1-sub. K_4 と同型でない.

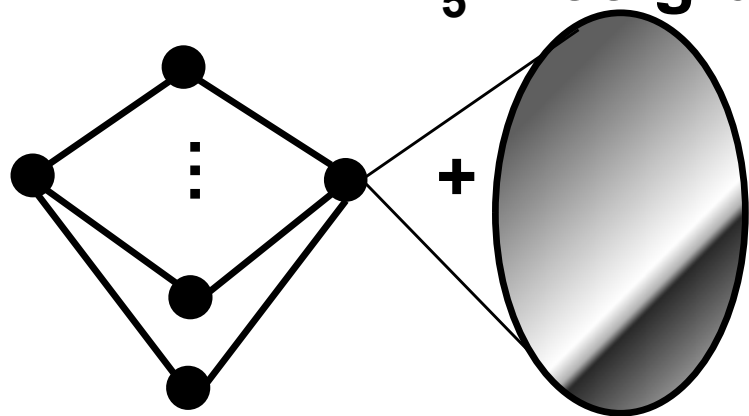
1-subdivided K_4



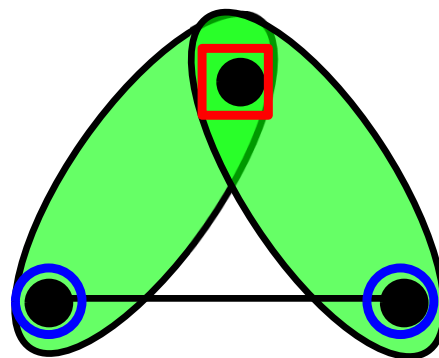


HISTを持たない P_5 -free graph

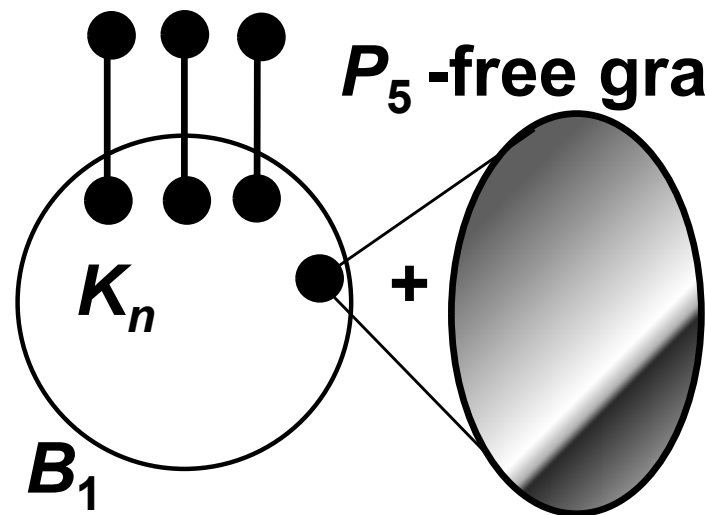
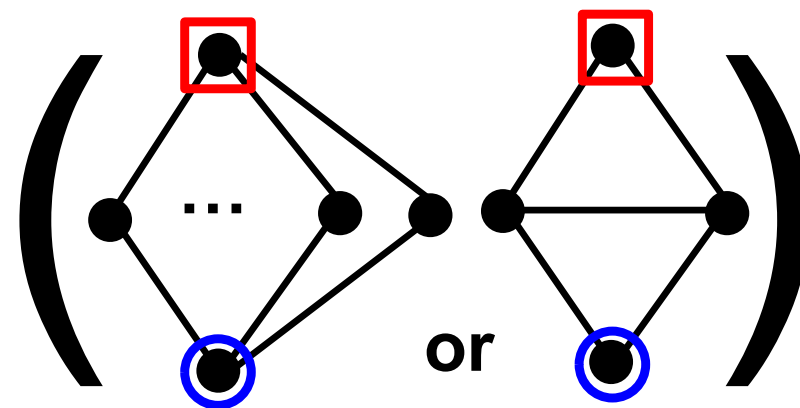
P_5 -free graph



A_1

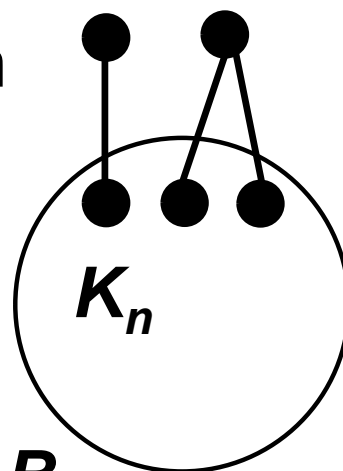


A_2

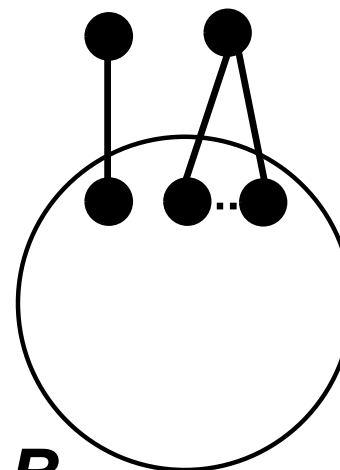


B_1

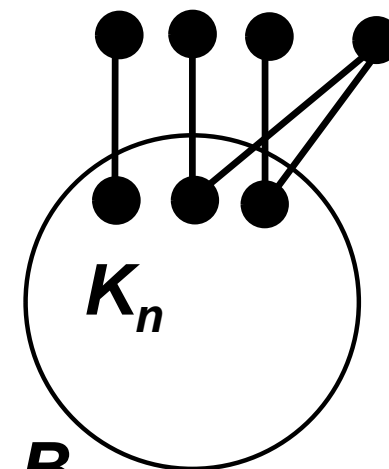
P_5 -free graph



B_2



B_3



B_4





P_5 -free graph

定理 30 (Diemunsch, Furuya, Sharifzadeh, T, Wang, Wise and Yeager, 2015)

G : 連結な P_5 -free graph.

G が **HIST** を持つ $\Leftrightarrow G$ は A_i や B_j と同型でない, または 7 頂点以下のグラフ.

P_6 -free graph の場合や一般化はできるか?





系

系

G : 連結な P_4 -free graph, $|G|=n \geq 5$.

G は $n-1$ 頂点以上の HIT を持つ.

系

G : 連結な P_5 -free graph, $|G|=n \geq 7$.

G は $n-2$ 頂点以上の HIT を持つ.

G の large HIT : 頂点数が $|G|$ の線形オーダーの HIT.





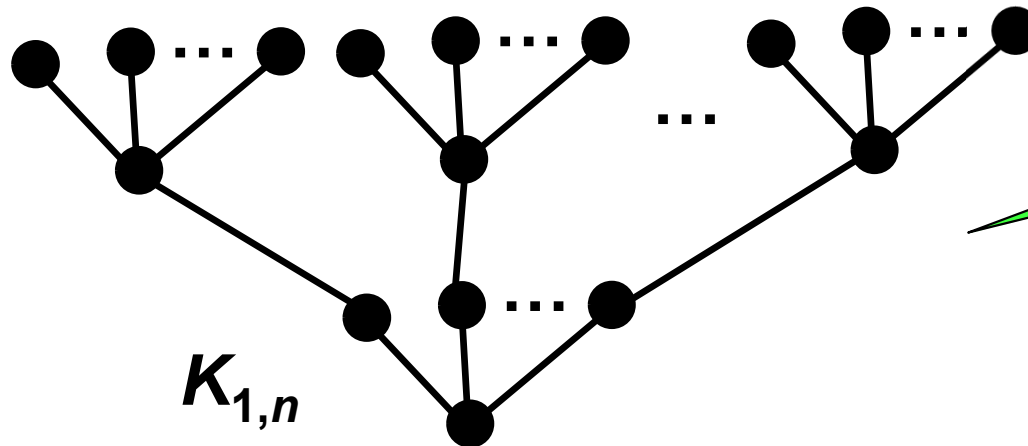
Path-free graphのlarge HIT

定理 31 (Furuya and T, 2020)

G : 連結な P_6 -free graph, $|G|=n \geq 9$.
 G は $(n+2)/2$ 頂点以上の **HIT** を持つ.

定理 32 (Furuya and T, 2020)

G : 連結な P_7 -free graph, $|G|=n \geq 9$.
 G は $(n+3)/3$ 頂点以上の **HIT** を持つ.



large HITを持たない
 P_8 -free graph



Treeの次数条件の考察(次数1除く)

	大きい次数×	小さい次数×
全て禁止 spanning tree	ハミルトン道	HIST
全て禁止	最長の道	最大のHIT
一部緩和 spanning tree	k -tree	次数2の頂点を部分的に 制限したspanning tree

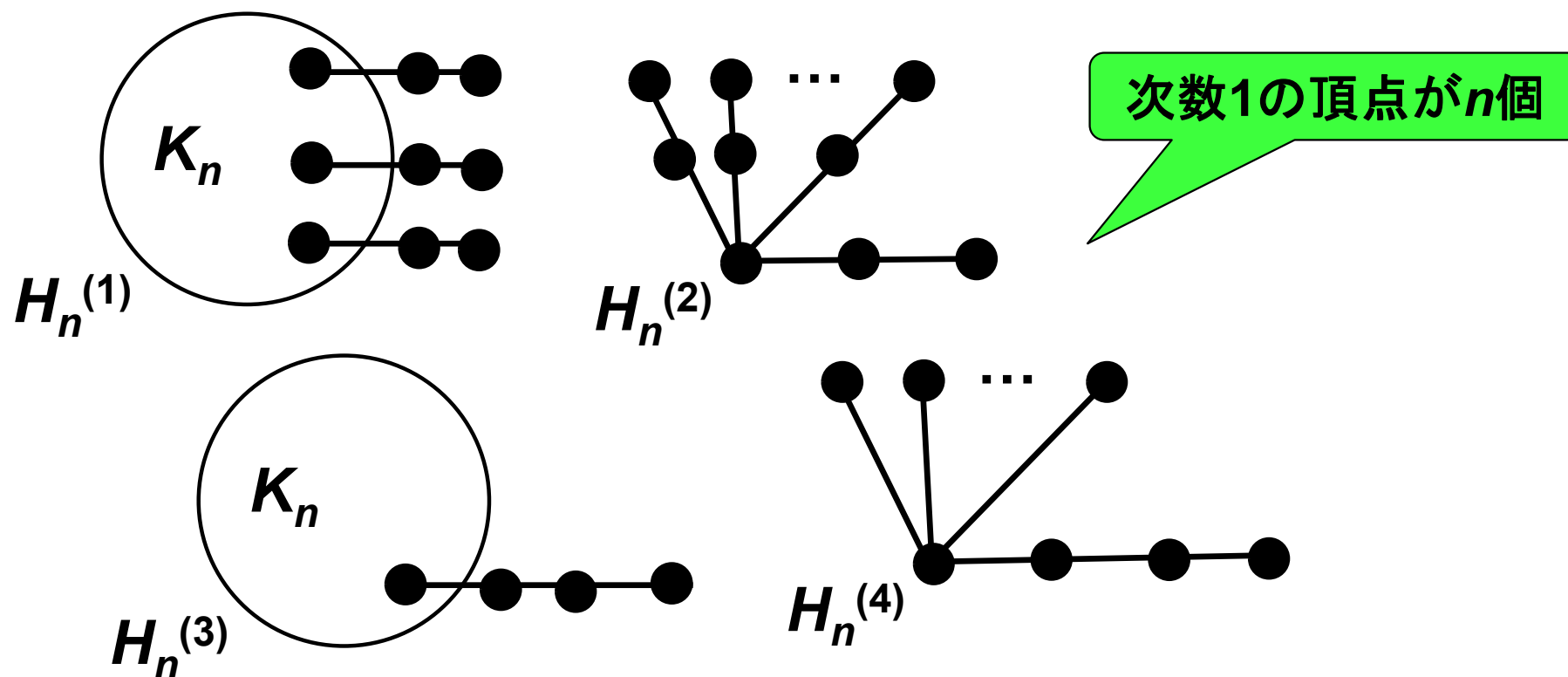
k -tree : 最大次数が k 以下のspanning tree.

G が $|G| - p$ 頂点のHITを持つ $\Rightarrow$
 G は次数2の頂点が高々 p 個のspanning treeを持つ.



HISTの緩和

- (a) 次数2の頂点で誘導されるpath が短いspan. tree.
- (b) 次数2の頂点が少ないspan. tree.
- (c) 次数2の頂点同士が隣接しないspan. tree.





禁止部分グラフとHISTの緩和

- (a) 次数2の頂点で誘導されるpath が短いspan. tree.
- (b) 次数2の頂点が少ないspan. tree.
- (c) 次数2の頂点同士が隣接しないspan. tree.

定理 33 (Furuya and T, 2024)

$\mathcal{H}$: 連結グラフの族.

ある整数 i が存在し, 頂点数が i 以上の任意の
連結 $\mathcal{H}$ -free graph が (a) を持つ

$\Leftrightarrow \mathcal{H} \subseteq \{P_n\}$ (n は2以上の整数).





禁止部分グラフとHISTの緩和

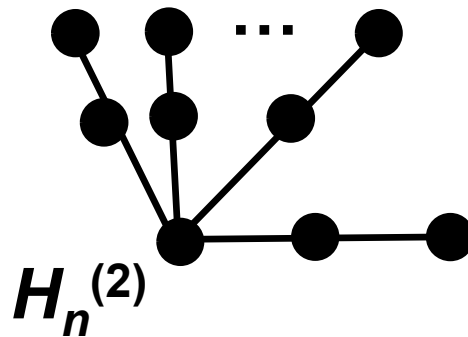
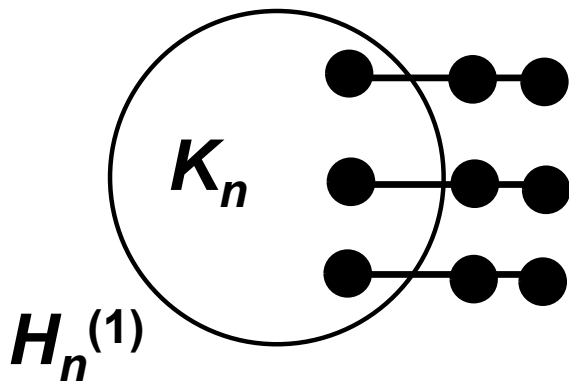
- (a) 次数2の頂点で誘導されるpath が短いspan. tree.
- (b) 次数2の頂点が少ないspan. tree.
- (c) 次数2の頂点同士が隣接しないspan. tree.

定理 34 (Furuya and T, 2024)

$\mathcal{H}$: 連結グラフの族.

ある整数 i が存在し, 頂点数が i 以上の任意の連結 $\mathcal{H}$ -free graph が (b) を持つ

$\Leftrightarrow \mathcal{H} \subseteq \{P_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}\}$ (n は 2 以上の整数).





禁止部分グラフとHISTの緩和

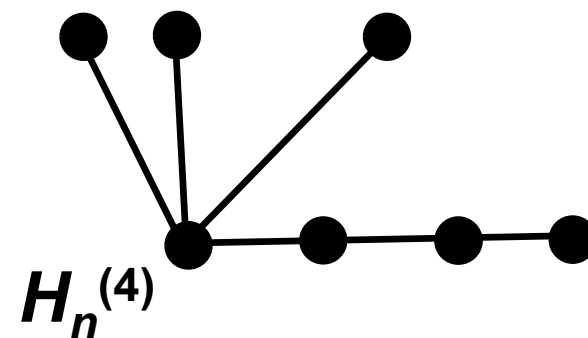
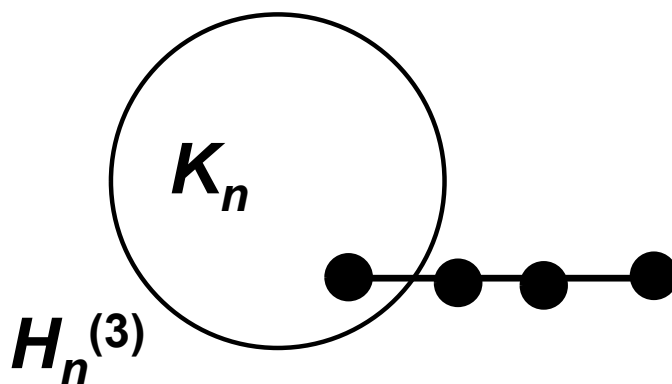
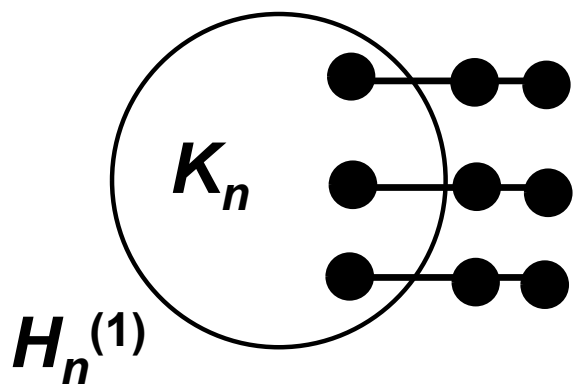
- (a) 次数2の頂点で誘導されるpath が短いspan. tree.
- (b) 次数2の頂点が少ないspan. tree.
- (c) 次数2の頂点同士が隣接しないspan. tree.

定理 35 (Furuya and T, 2024)

$\mathcal{H}$: 連結グラフの族.

ある整数 i が存在し, 頂点数が i 以上の任意の
連結 $\mathcal{H}$ -free graph が (c) を持つ

$\Leftrightarrow \mathcal{H} \subseteq \{P_n, H_n^{(1)}, H_n^{(3)}, H_n^{(4)}\}$ (n は 2 以上の整数).





講演内容

- (1)基本用語の説明(主にtree関連)
- (2)曲面上のグラフ
 - ・三角形分割とHIST
 - ・平面グラフとHIST
 - ・Halin graph
- (3)禁止部分グラフ**
 - ・HISTとその緩和
 - ・**Spanning Halin subgraphの存在保証**
- (4)直径を制限したグラフ
- (5)次数条件
 - ・正則グラフ
 - ・最小次数条件
 - ・非隣接2頂点における次数条件



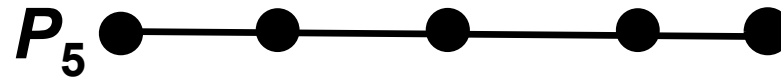
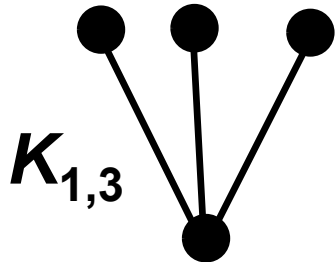


禁止部分グラフとspanning Halin subgraph

Diemunsch et. al. (2015) は, **HIST**を持つ
連結 P_5 -free graphを特徴づけた.

系 (Diemunsch et al., 2015)

3-連結 $\{K_{1,3}, P_5\}$ -free graphは**HIST**を持つ.



定理 36 (Bian et al, 2014)

3-連結 $\{K_{1,3}, P_9\}$ -free graphは**Hamilton conn..**

3-連結 $\{K_{1,3}, P_5\}$ -free graphはspan. Halin
sub.を持つための必要条件を満たす.

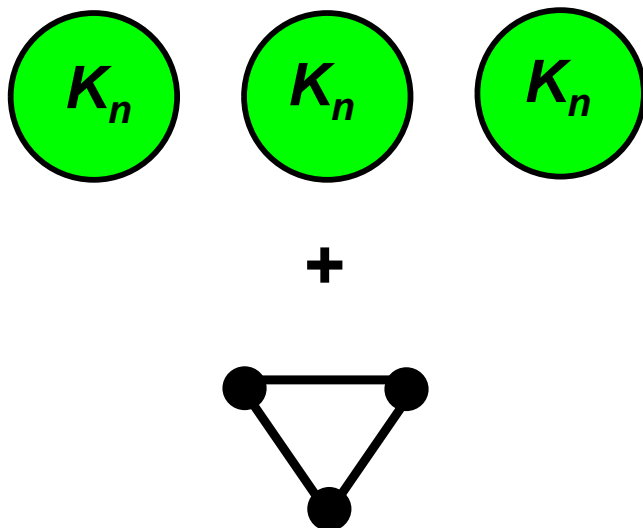


禁止部分グラフとspanning Halin subgraph

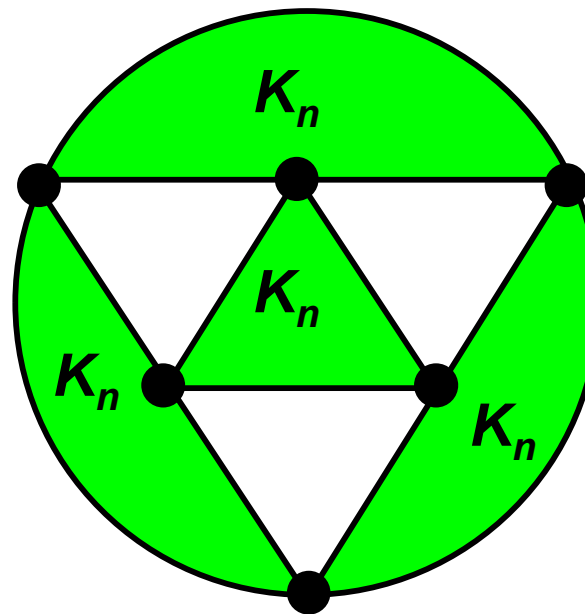
定理 37 (Chen, Han, O, Shan and T, 2017)

任意の3-連結 $\{K_{1,3}, P_5\}$ -free graph は
spanning Halin subgraphを持つ。

$\{K_{1,4}, P_5\}$ -free graph



$\{K_{1,3}, P_6\}$ -free graph





禁止部分グラフ対の考察

問題

「 $\forall$ 3-連結 $\{H_1, H_2\}$ -free graph $\Rightarrow \exists$ span. Halin sub.」 という命題を成立させる H_1, H_2 の組を完全決定せよ.



$\{K_{1,3}, P_5\}$

$\{K_{1,3}, P_4\}$ や $\{K_{1,2}, P_5\}$ も OK



$\{K_{1,4}, P_5\}, \{K_{1,3}, P_6\}$



禁止部分グラフとspanning Halin subgraph

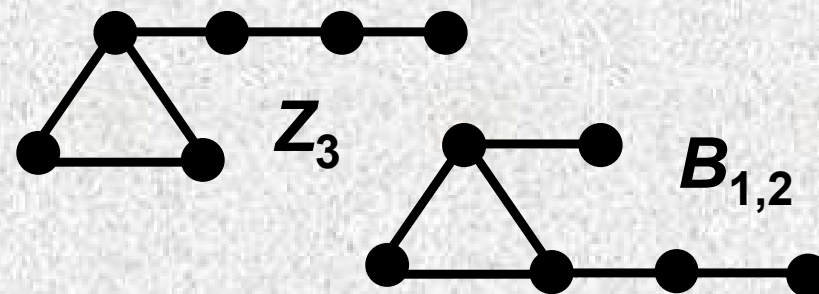
予想 3 (Chen, Han, O, Shan and T, 2017)

$\forall$ 3-連結 $\{H_1, H_2\}$ -free graph (頂点数十分大)

が **span. Halin sub.** を持つ $\Leftrightarrow$

(i) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, Z_3\}$, または

(ii) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$.



$\Rightarrow$ 解決済み

$\Leftarrow$ 未解決

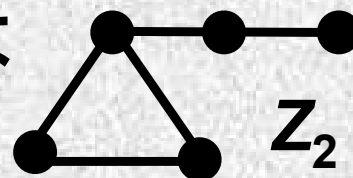




Span. Halin sub.の十分条件

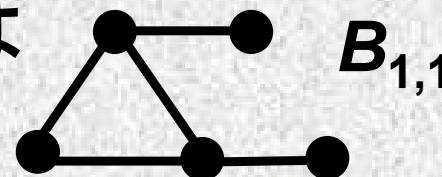
定理 38 (Chen, Furuya, Shan, T and Yang, 2019)

任意の3-連結 $\{K_{1,3}, Z_2\}$ -free graph は
spanning Halin subgraphを持つ.



定理 39 (Chen, Furuya, Shan, T and Yang, 2019)

任意の3-連結 $\{K_{1,3}, B_{1,1}\}$ -free graph は
spanning Halin subgraphを持つ.



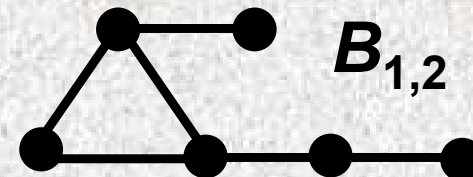
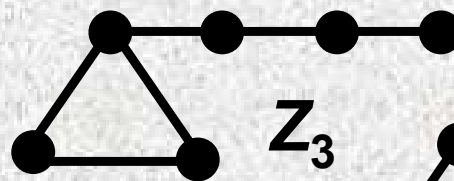
予想 3 (Chen, Han, O, Shan and T, 2017)

$\forall$ 3-連結 $\{H_1, H_2\}$ -free graph(頂点数十分大)

が**span. Halin sub.**を持つ $\Leftrightarrow$

(i) $\{H_1, H_2\} \subseteq \{K_{1,3}, Z_3\}$, または

(ii) $\{H_1, H_2\} \subseteq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$.





禁止部分グラフ対の考察

問題

「 $\forall$ 3-連結 $\{H_1, H_2\}$ -free graph $\Rightarrow \exists$ span. Halin sub.」 という命題を成立させる H_1, H_2 の組を完全決定せよ.



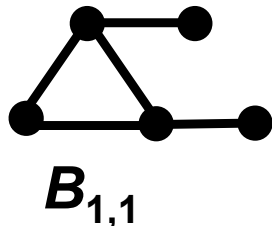
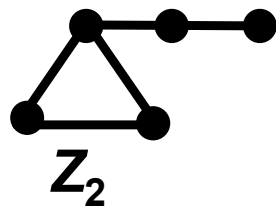
$\{K_{1,3}, P_5\}$

$\{K_{1,3}, P_4\}$ や $\{K_{1,2}, P_5\}$ も OK

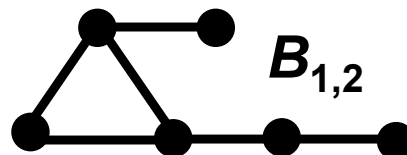
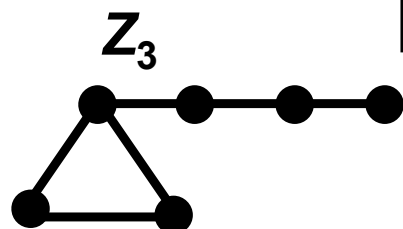
$\{K_{1,4}, P_5\}, \{K_{1,3}, P_6\}$

その他

$\{K_{1,3}, Z_2\}, \{K_{1,3}, B_{1,1}\}$



$\{K_{1,3}, Z_3\}$
 $\{K_{1,3}, B_{1,2}\}$



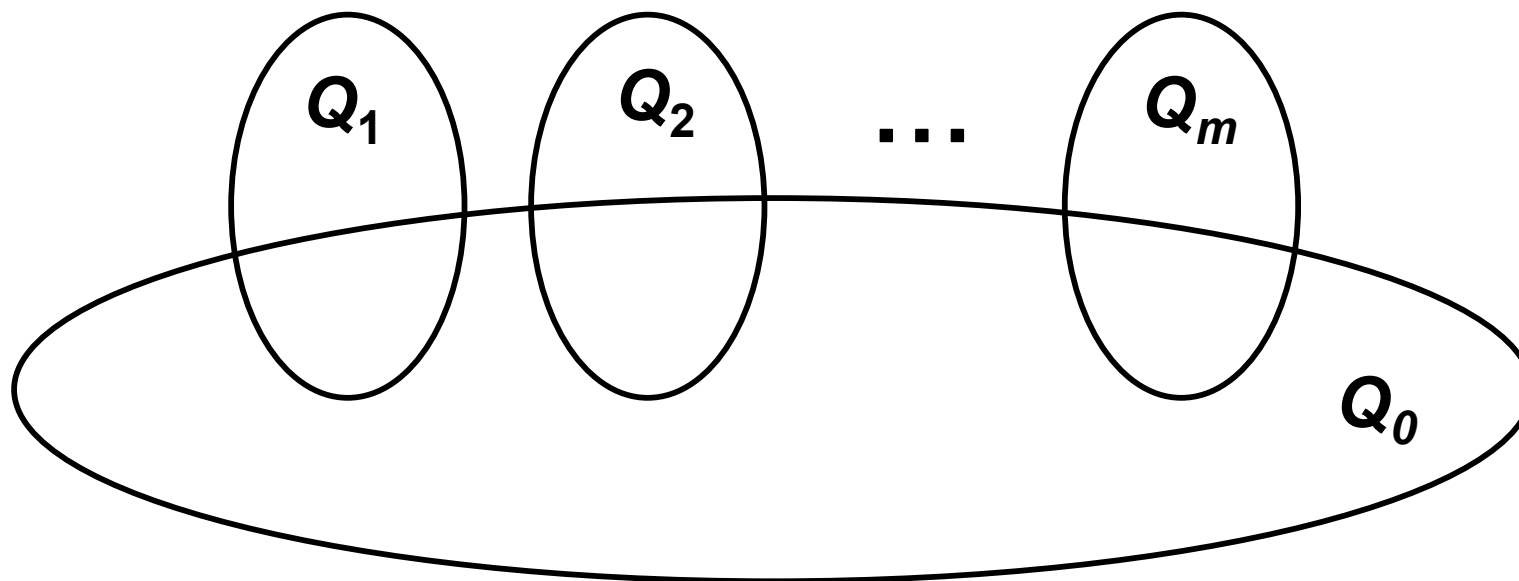
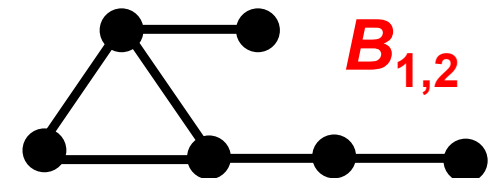
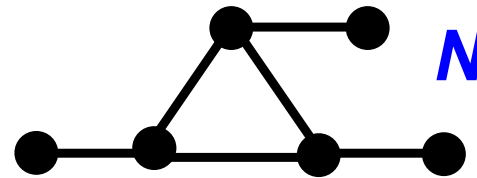


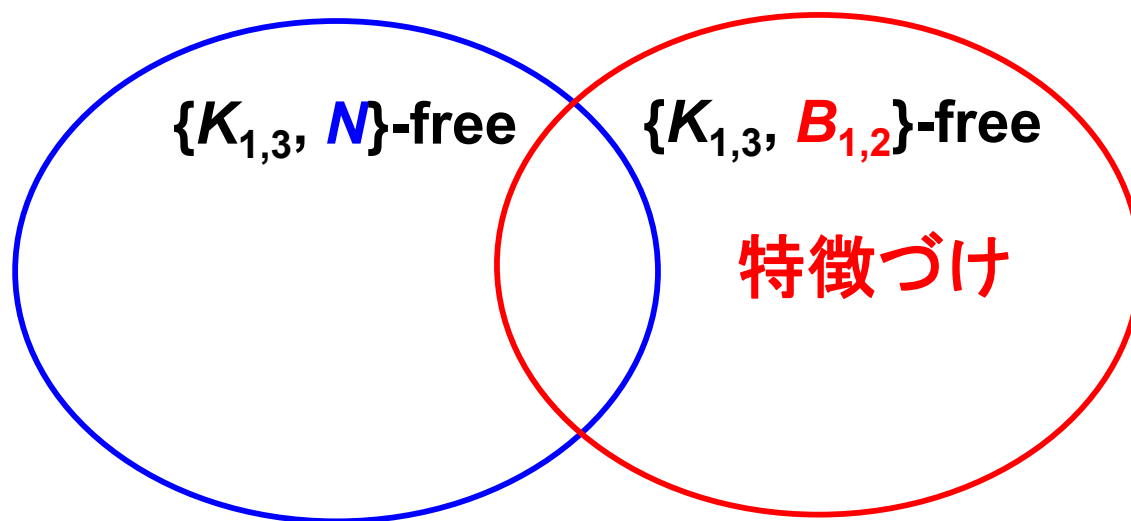
禁止部分グラフと差集合

定理 40 (Furuya and T, 2015)

G : 連結 $\{K_{1,3}, B_{1,2}\}$ -free graph.

G が N -freeでない $\Leftrightarrow G$ がgeneralized comb.





定理 41 (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)
任意の2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -free graph は
ハミルトン閉路を持つ。

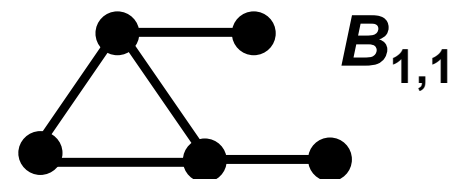
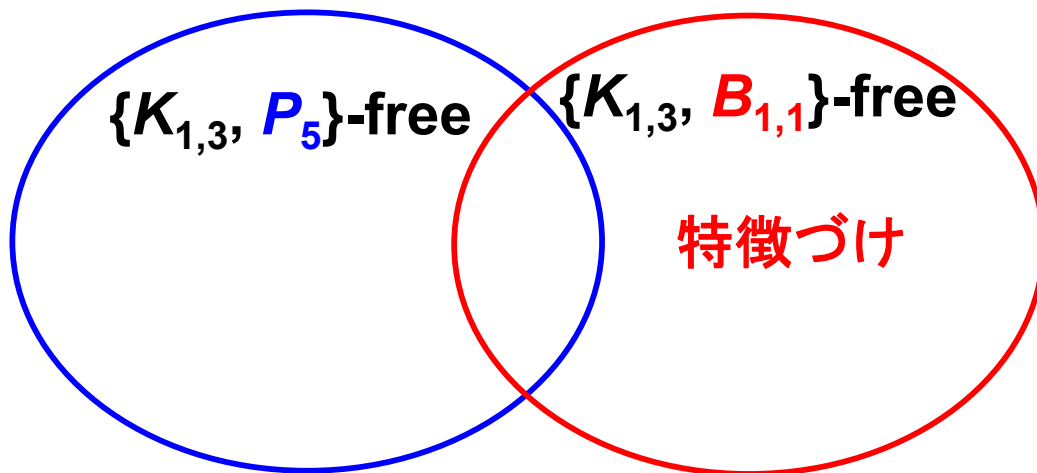
定理 42 (Bedrossian, 1991)
任意の2-連結 $\{K_{1,3}, B_{1,2}\}$ -free graph は
ハミルトン閉路を持つ。

別証明が得られる

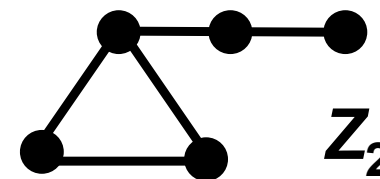
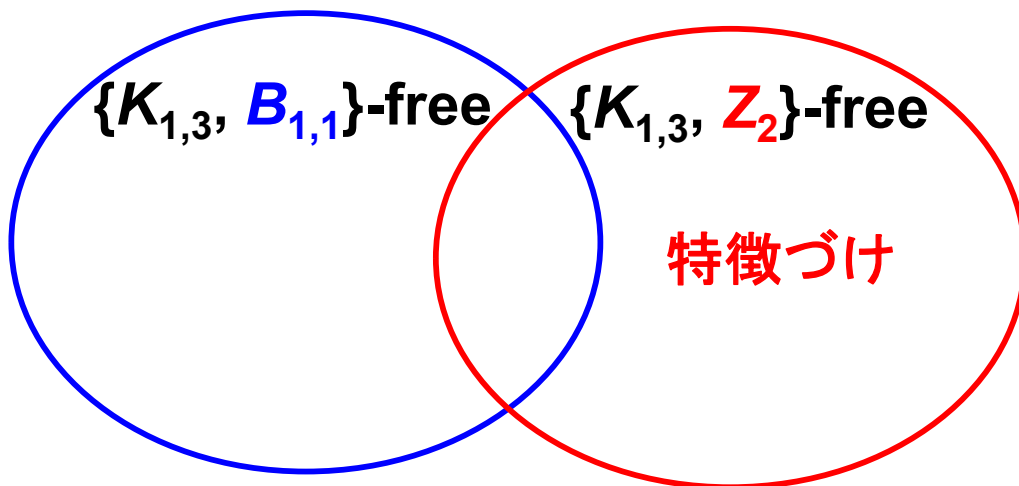


証明の概要(定理38, 39)

- ・ P_5 -freeでない連結 $\{K_{1,3}, B_{1,1}\}$ -free graph



- ・ $B_{1,1}$ -freeでない連結 $\{K_{1,3}, Z_2\}$ -free graph





講演内容

- (1)基本用語の説明(主にtree関連)
- (2)曲面上のグラフ
 - ・三角形分割とHIST
 - ・平面グラフとHIST
 - ・Halin graph
- (3)禁止部分グラフ
 - ・HISTとその緩和
 - ・Spanning Halin subgraphの存在保証
- (4)直径を制限したグラフ**
- (5)次数条件
 - ・正則グラフ
 - ・最小次数条件
 - ・非隣接2頂点における次数条件





直径を制限したグラフとHIST

予想 43 (Albertson et al., 1990)

頂点数10以上のtwinを持たない直径2のグラフは**HIST**を持つ.



予想18の反証

予想 18 (Lovász and Plummer, 1975)

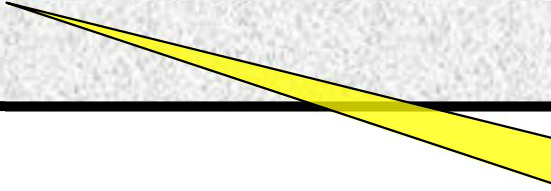
任意の4-連結平面三角形分割はspanning Halin subgraphを持つ.

定理 25 (Chen, Enomoto, Ozeki and T, 2015)

Span. Halin sub. を持たない4-連結平面三角形分割の無限系列が存在する.

定理 26 (Chen, Enomoto, Ozeki and T, 2017)

Span. Halin sub. を持たない5-連結平面三角形分割の無限系列が存在する.



連結度をあげる
のは妥当?





直径を制限したグラフとHIST

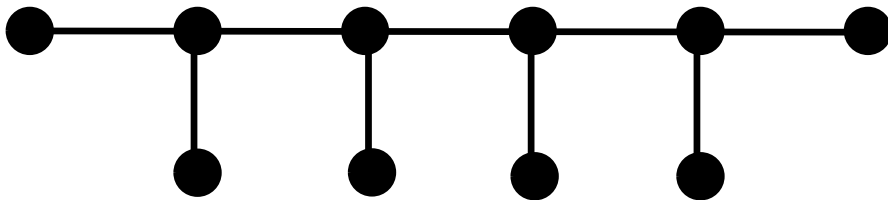
予想 43 (Albertson et al., 1990)

頂点数10以上のtwinを持たない直径2のグラフは**HIST**を持つ.

頂点 u , v の **距離**: u , v を結ぶ最短pathの長さ(辺の本数).

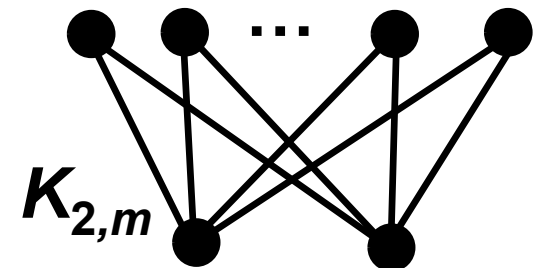
グラフの直径: 任意の2頂点間の距離の最大値.

n 頂点の**HIST**に含まれる最長pathの長さは高々 $n/2$.



HISTを持つならば
直径 $n/2$ 以下

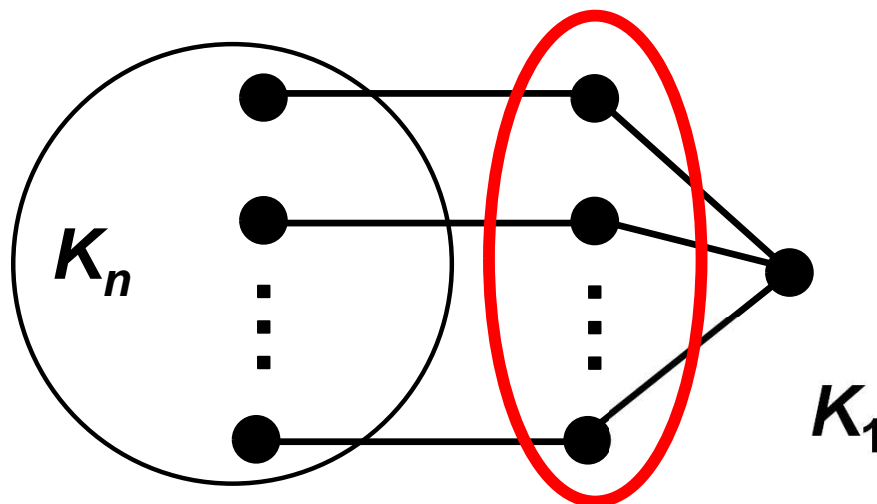
twin: 隣接する頂点集合が一致する2頂点.



予想43の反証+α

予想 43 (Albertson et al., 1990)

頂点数10以上のtwinを持たない直径2のグラフは**HIST**を持つ.

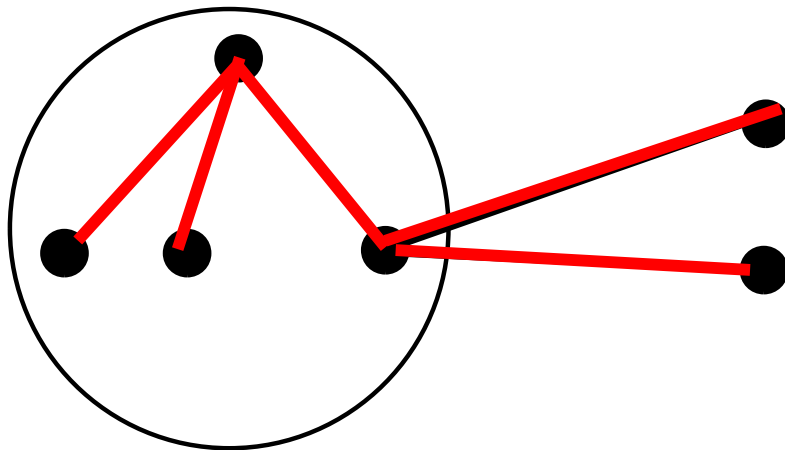
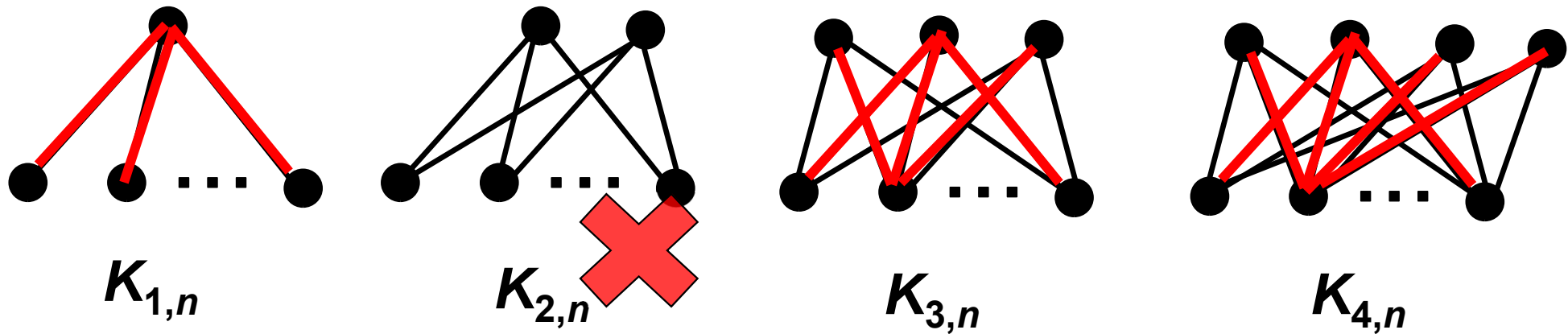


twinの非存在は必要?

定理 44 (Ando, 2020+)

10頂点以上のtwinを持たない直径2のグラフ G が**HIST**を持つ
 $\Leftrightarrow G$ は上記のグラフと同型でない.

Twin を持つグラフとHIST

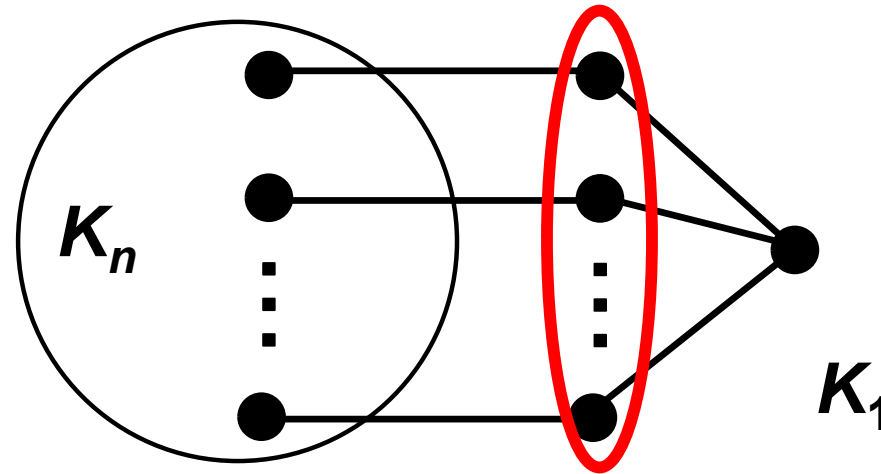
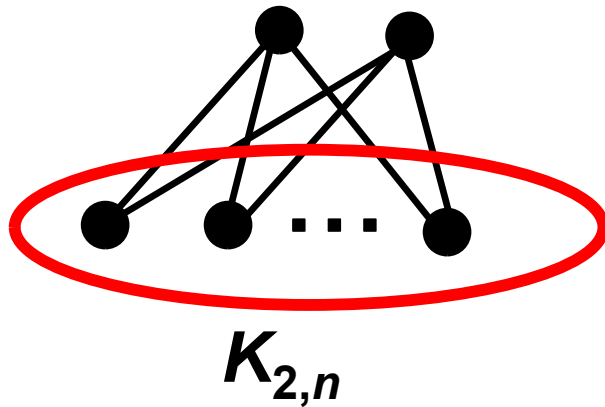


twinの非存在は
強すぎるかもしれない



Blocking set

Blocking set : 次数2の頂点からなるcut set.



命題 4

G : 連結グラフ. S : G のcut set.

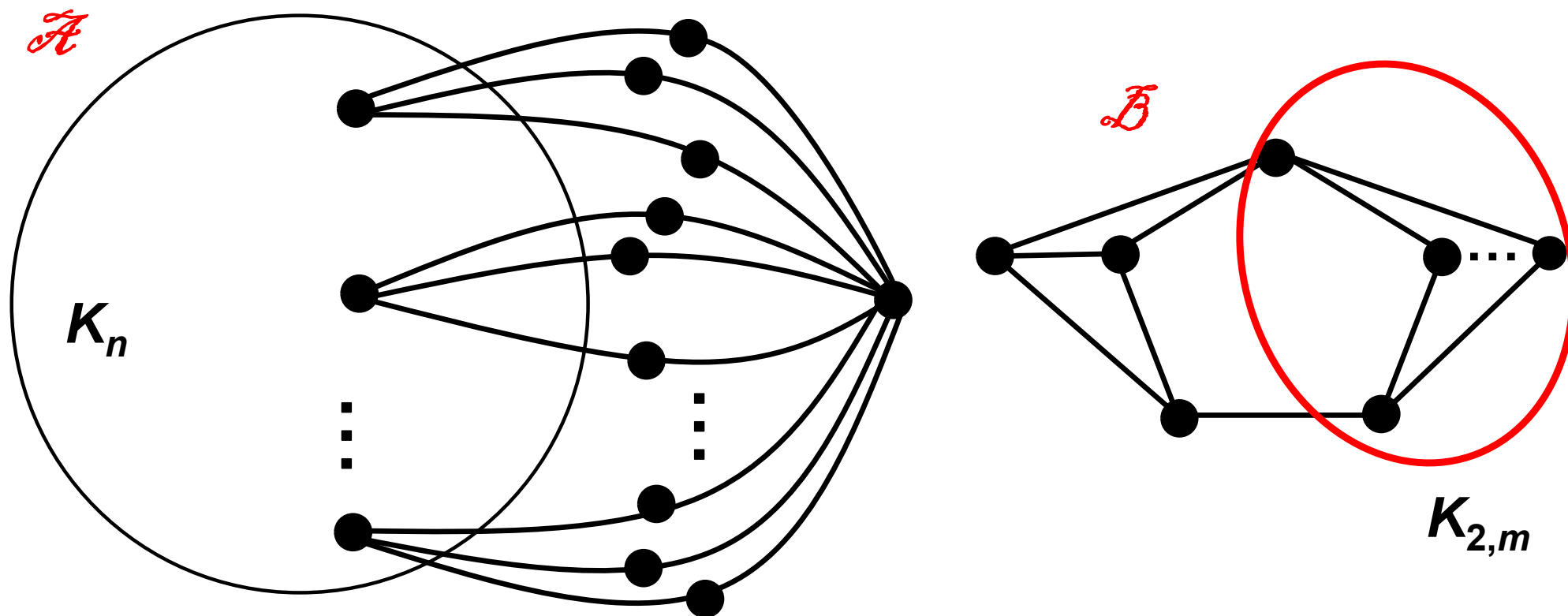
S の各頂点の次数が2 $\Rightarrow G$ は**HIST**を持たない.

HISTを持つグラフは**blocking set** を持たない.

「**twain** を持たない」をこの条件に置き換えられるか?



直径2のグラフのHIST



定理 45 (Shan and T, 2023)

10頂点以上の直径2のグラフ G がHISTを持つ

$\Leftrightarrow G$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ のグラフと同型でない.



証明の概要(定理45)

定理 46 (Shan and T, 2023)

G : 10頂点以上の**blocking set**を持たない**直径2**のグラフ.

G が**HIST**を持つ

$\Leftrightarrow G$ は $\mathcal{B}$ のグラフと同型でない.

定理 47 (Shan and T, 2023)

G : 10頂点以上の**直径2**のグラフ.

G が**blocking set**を持つ

$\Leftrightarrow G$ は $\mathcal{A}$ のグラフと同型.

定理 45 (Shan and T, 2023)

10頂点以上の**直径2**のグラフ G が**HIST**を持つ

$\Leftrightarrow G$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ のグラフと同型でない.



講演内容

- (1)基本用語の説明(主にtree関連)
- (2)曲面上のグラフ
 - ・三角形分割とHIST
 - ・平面グラフとHIST
 - ・Halin graph
- (3)禁止部分グラフ
 - ・HISTとその緩和
 - ・Spanning Halin subgraphの存在保証
- (4)直径を制限したグラフ
- (5)次数条件**
 - ・正則グラフ
 - ・最小次数条件
 - ・非隣接2頂点における次数条件



正則グラフとHIST

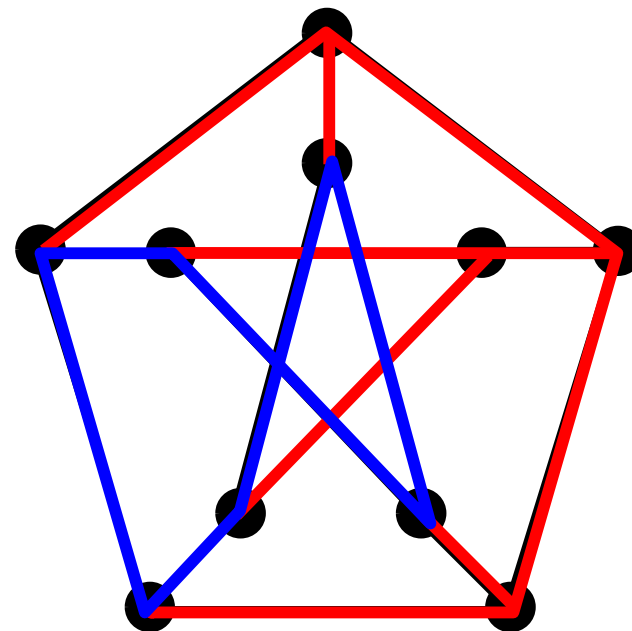
予想 48 (Albertson et al., 1990)

任意の整数 k ($k > 0$) について, **HIST** を持たない cyclically k -edge connected な 3-正則グラフが存在する.

k -正則グラフ : 各頂点の次数が k のグラフ.

cyclically k -edge connected graph G :

任意の k 本未満の辺集合 E について,
 $G - E$ の連結成分で閉路を含むものが
高々 1 つ.





予想48の解決

定理 49 (Hoffmann-Ostenhof, Ozeki and Noguchi, 2018)
3-正則2部グラフ G が**HIST**を持つならば $|V(G)| \equiv 2 \pmod{4}$.

定理 50 (Hoffmann-Ostenhof, Ozeki and Noguchi, 2018)
 $|V(G)| \equiv 0 \pmod{4}$ となるcyclically k -edge connected
な3-正則2部グラフ G が存在する.

予想 48 (Albertson et al., 1990)
任意の整数 k ($k > 0$)について, **HIST**を持たないcyclically k -edge
connectedな3-正則グラフが存在する.

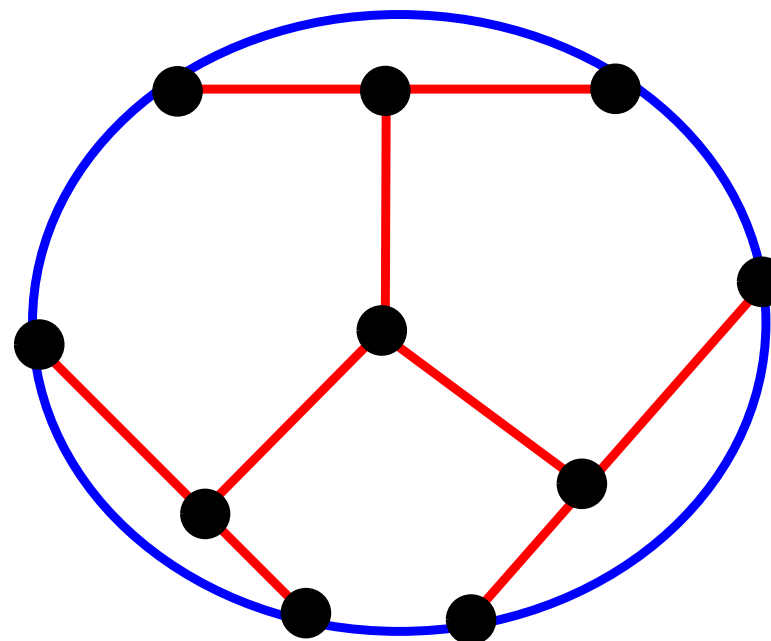
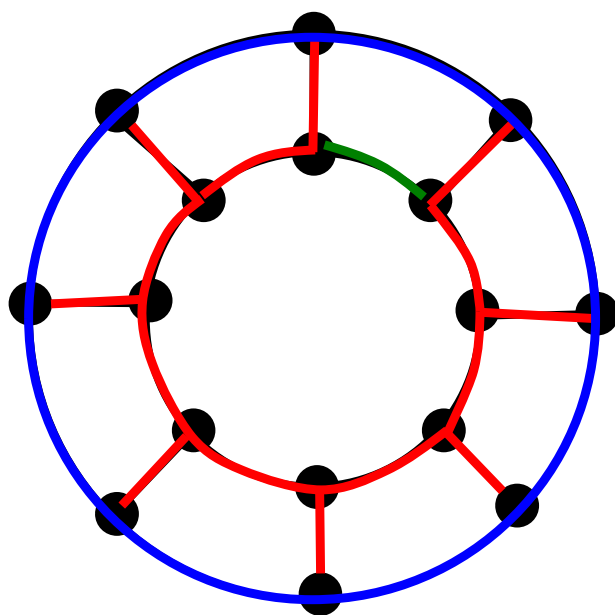
定理 51 (Zhai et al., 2019)
トーラス上の**3-正則六角形分割** G が**HIST**を持つための
必要十分条件は G が奇数枚の面を持つこと.



3-分割予想

予想 2 (Hoffmann-Ostenhof, 2011)

任意の連結な3-正則グラフはspanning tree, 2-正則グラフ, 1-正則グラフ (マッチング)に分割できる. ただし, マッチングは空集合でもよい.



定理 52 (Hoffmann-Ostenhof, Kaiser and Ozeki, 2018)

任意の連結な3-正則平面グラフはspanning tree, 2-正則グラフ, 1-正則グラフ (マッチング)に分割できる. ただし, マッチングは空集合でもよい.





3-分割予想

予想 2 (Hoffmann-Ostenhof, 2011)

任意の連結な3-正則グラフはspanning tree, 2-正則グラフ, 1-正則グラフ
(マッチング)に分割できる. ただし, マッチングは空集合でもよい.

ハミルトン閉路を持つグラフ (Akbari, Jensen and Siggers, 2015)

ハミルトン道を持つグラフ (Liu and Li, 2020)

3-連結平面グラフ (Ozeki and Ye, 2016)

射影平面上の3-連結グラフ (Ozeki and Ye, 2016)

トーラス上の3-連結グラフ (Bachstein, 2015)

クラインの壺上の3-連結グラフ (Bachstein, 2015)

$K_{1,3}$ -free graph (Hong et al., 2020, Aboomahigir et al., 2021)





講演内容

- (1)基本用語の説明(主にtree関連)
- (2)曲面上のグラフ
 - ・三角形分割とHIST
 - ・平面グラフとHIST
 - ・Halin graph
- (3)禁止部分グラフ
 - ・HISTとその緩和
 - ・Spanning Halin subgraphの存在保証
- (4)直径を制限したグラフ
- (5)次数条件**
 - ・正則グラフ
 - ・最小次数条件**
 - ・非隣接2頂点における次数条件





HISTの最小次数条件

$\delta(G)$: G の最小次数.

定理 53 (Joffe, 1982)

G : 頂点数 n ($n \geq 6$) の連結グラフ

$\delta(G) \geq n/2 \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.

定理 54 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)

任意の2頂点が **長さ2のpath** で結ばれたグラフは **HIST** を持つ.

系 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)

G : 頂点数 n ($n \geq 5$) の連結グラフ

$\delta(G) \geq n/2 \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.





系の証明

系 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)

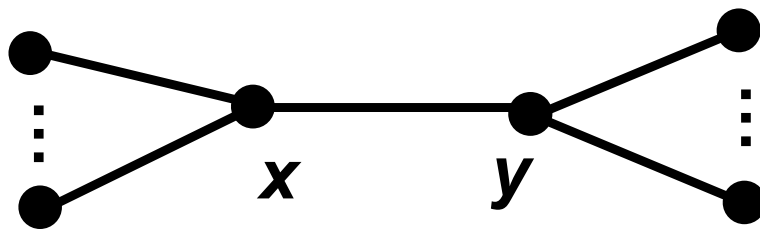
G : 頂点数 n ($n \geq 5$) の連結グラフ

$\delta(G) \geq n/2 \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.

x, y : G の頂点

x と y の **共通近傍** : x と y につながる頂点の集合.

(i) $xy \in E(G)$ x と y の **共通近傍** が無ければ, G は **HIST** を持つ.



(ii) $xy \notin E(G)$ 次数条件より x と y の **共通近傍** がある.

定理 54 (Albertson, Berman, Hutchinson and Thomassen, 1990)

任意の2頂点が **長さ2のpath** で結ばれたグラフは **HIST** を持つ.



HISTの最小次数条件

G : n 頂点の連結グラフ.

$\delta(G)$: G の各頂点の次数の最小値.

定理 55 (Albertson et al., 1990)

$\delta(G) \geq 4\sqrt{2n} \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.

オーダー的にbest

定理 56 (Furuya, Saito and T, 2025)

$\delta(G) \geq c_k \sqrt{n} \Rightarrow G$ は **[2,k]-ST** を持つ.

$$c_k = \sqrt{k(k-1)(k+2\sqrt{2k}+2)n}$$

系 (Furuya, Saito and T, 2025)

$\delta(G) \geq 4\sqrt{n} \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.



HISTの緩和の最小次数条件

- (a) 次数2の頂点で誘導されるpath が短いspan. tree.
- (b) 次数2の頂点が少ないspan. tree.
- (c) 次数2の頂点同士が隣接しないspan. tree.

定理 57 (Lyngsie and Merker, 2019)

G : 連結グラフ.

定数 d が存在し, $\delta(G) \geq d$ ならば G は (c) を持つ.

Bestでない

4以上は必要

定理 58 (Lyngsie and Merker, 2019)

G : 連結グラフ.

$\delta(G) \geq 4$ ならば G は次数2の頂点で誘導されるpathの長さが高々1のspanning tree を持つ ((a)を持つ).

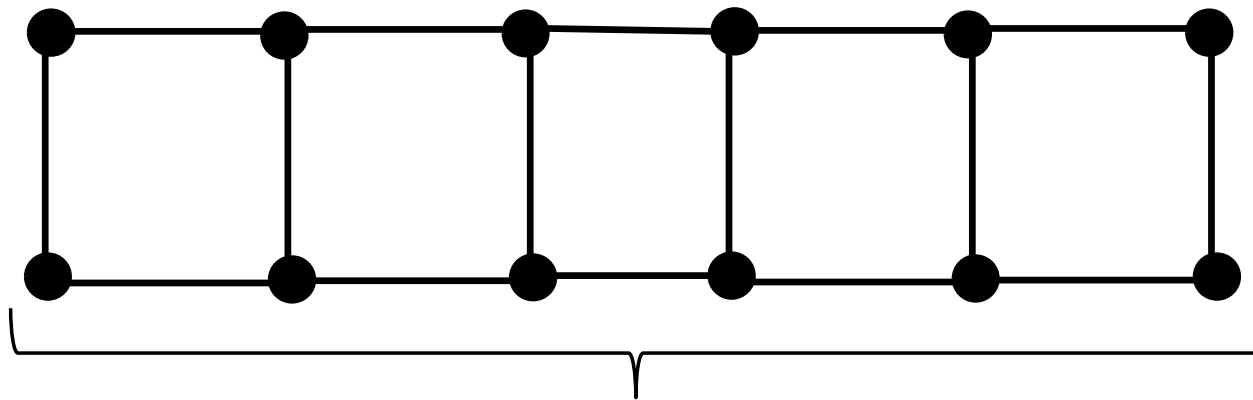


Span. Halin sub.の最小次数条件

定理 59 (Chen and Shan, 2019)

G : n 頂点のグラフ(n 十分大).

$\delta(G) \geq (n+1)/2 \Rightarrow G$ は **span. Halin sub.**を持つ.



Ladder構造





講演内容

- (1)基本用語の説明(主にtree関連)
- (2)曲面上のグラフ
 - ・三角形分割とHIST
 - ・平面グラフとHIST
 - ・Halin graph
- (3)禁止部分グラフ
 - ・HISTとその緩和
 - ・Spanning Halin subgraphの存在保証
- (4)直径を制限したグラフ
- (5)次数条件**
 - ・正則グラフ
 - ・最小次数条件
 - ・非隣接2頂点における次数条件**





非隣接2頂点の次数和条件

$\sigma_2(G)$: グラフ G の非隣接2頂点次数和の最小値.

定理 60 (Ito and T, 2022)

G : n 頂点のグラフ ($n \geq 8$).

$\sigma_2(G) \geq n-1 \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.

Best

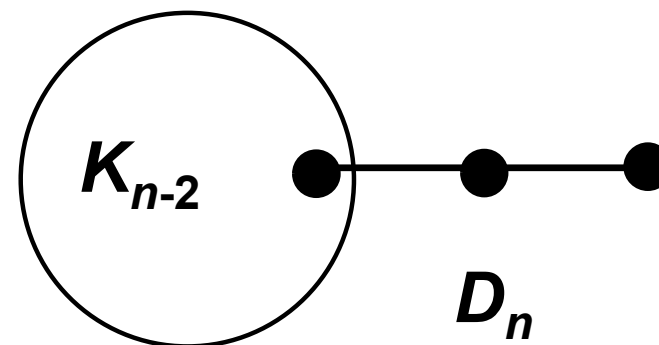
定理 45 (Shan and T, 2023)

10頂点以上の直径2のグラフ G が **HIST** を持つ

$\Leftrightarrow G$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ のグラフと同型でない.

直径2のグラフ.

$\sigma_2(G) \geq n-1$ のグラフ (頂点数 n).

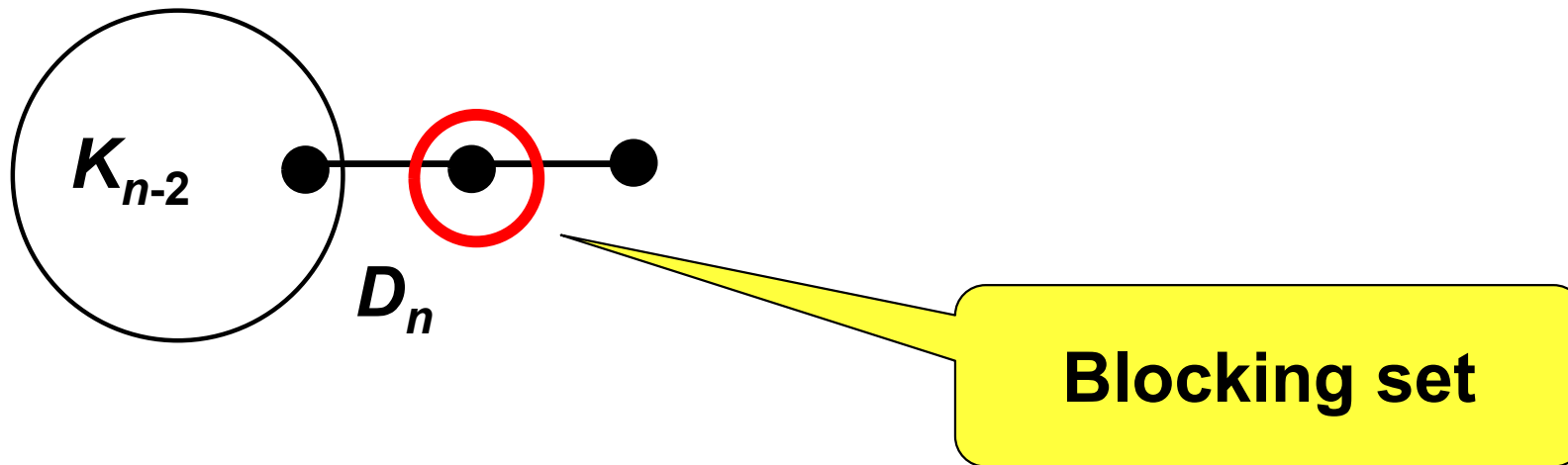


非隣接2頂点の次数と条件

定理 61 (Furuya, Saito and T, 2025)

G : n 頂点($n \geq 10$)で $\sigma_2(G) \geq n-2$ の連結グラフ.

G は **HIST** を持つ $\Leftrightarrow G$ は D_n と同型でない.



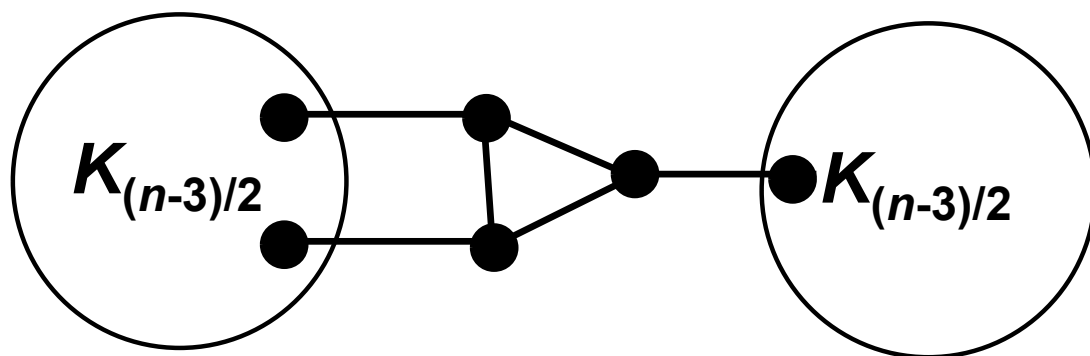


非隣接2頂点の次数和条件

系

G : n 頂点($n \geq 1091$)で $\sigma_2(G) \geq (n+2)/2$ の連結グラフ.

G は **HIST** を持つ $\Leftrightarrow G$ は blocking set を含まない.



Best

$$\sigma_2(G) = (n+1)/2$$

定理 62 (Furuya and T, 2023+)

G : n 頂点(n 十分大)で $\sigma_2(G) \geq (n+2k-2)/2$ の連結グラフ.

G は **[2, k]-ST** を持つ $\Leftrightarrow G$ は **k-blocking set** を含まない.

k-blocking set : 次数2~ k の頂点からなる cut set.



次数条件の比較

G : n 頂点のグラフ.

	HIST	ハミルトン閉路
最小次数 ($\delta(G)$)	$\geq 4\sqrt{n}$	$\geq n/2$ (Dirac, 1952)
次数和($\sigma_2(G)$)	$\geq n-1$	$\geq n$ (Ore, 1960)

$\geq n-2$ ($G \neq D_n$)

$\geq (n+2)/2$ ($\nexists$ blocking set)

$\sigma_2(G) \geq 2f(n)$

$\delta(G) \geq f(n)$



非隣接2頂点の次数積条件

$\pi_2(G)$: グラフ G の非隣接2頂点次数積の最小値.

定理 63 (Furuya and T, 2023+)

G : n 頂点のグラフ ($n \geq 4$).

$\pi_2(G) \geq (49 + 12\sqrt{13})n \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.

定理 63' (Furuya and T, 2023+)

G : n 頂点のグラフ ($n \geq 2k+2$).

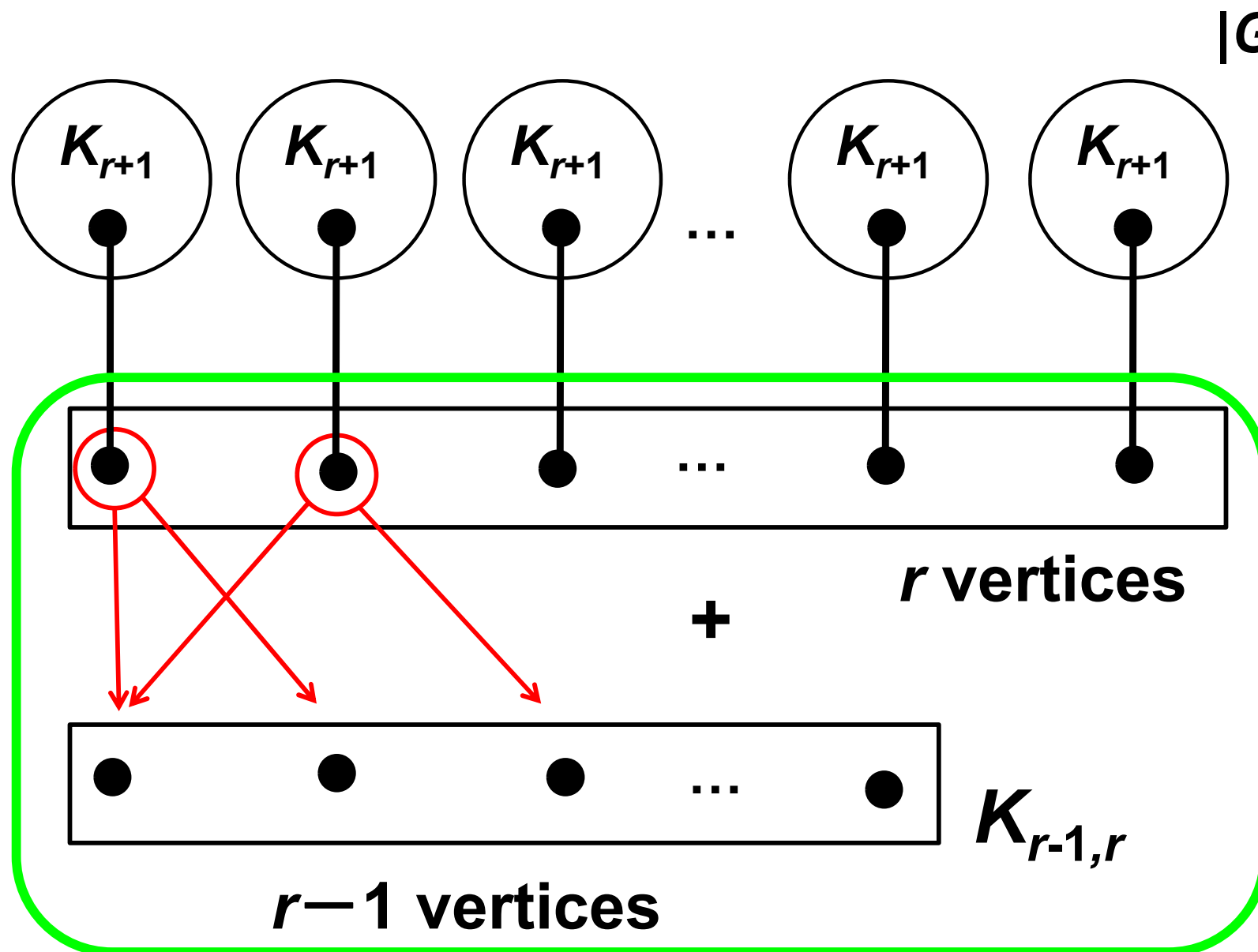
$\pi_2(G) \geq p_k n \Rightarrow G$ は **[2, k]-ST** を持つ.

k に依存した定数





HISTを持たないグラフ



$$|G| = r(r+1) + 2r - 1 \\ = r^2 + 3r - 1$$

$$\delta(G) = r$$

$$\pi_2(G) = r^2$$



証明の概要(定理62, 63)

定理 62 (Furuya and T, 2023+)

G : n 頂点($n \geq 1091$)で $\sigma_2(G) \geq (n+2)/2$ の連結グラフ.

G は**HIST**を持つ $\Leftrightarrow G$ はblocking setを含まない.

定理 63 (Furuya and T, 2023+)

G : n 頂点のグラフ ($n \geq 4$).

$\pi_2(G) \geq (49 + 12\sqrt{13})n \Rightarrow G$ は**HIST**を持つ.

$S = \{v \in V(G) \mid \text{次数} \alpha \text{未満}\}$

$\alpha = (n+2)/4$ (定理62),

$\alpha = \sqrt{(49 + 12\sqrt{13})n}$ (定理63).

S は完全グラフを誘導する



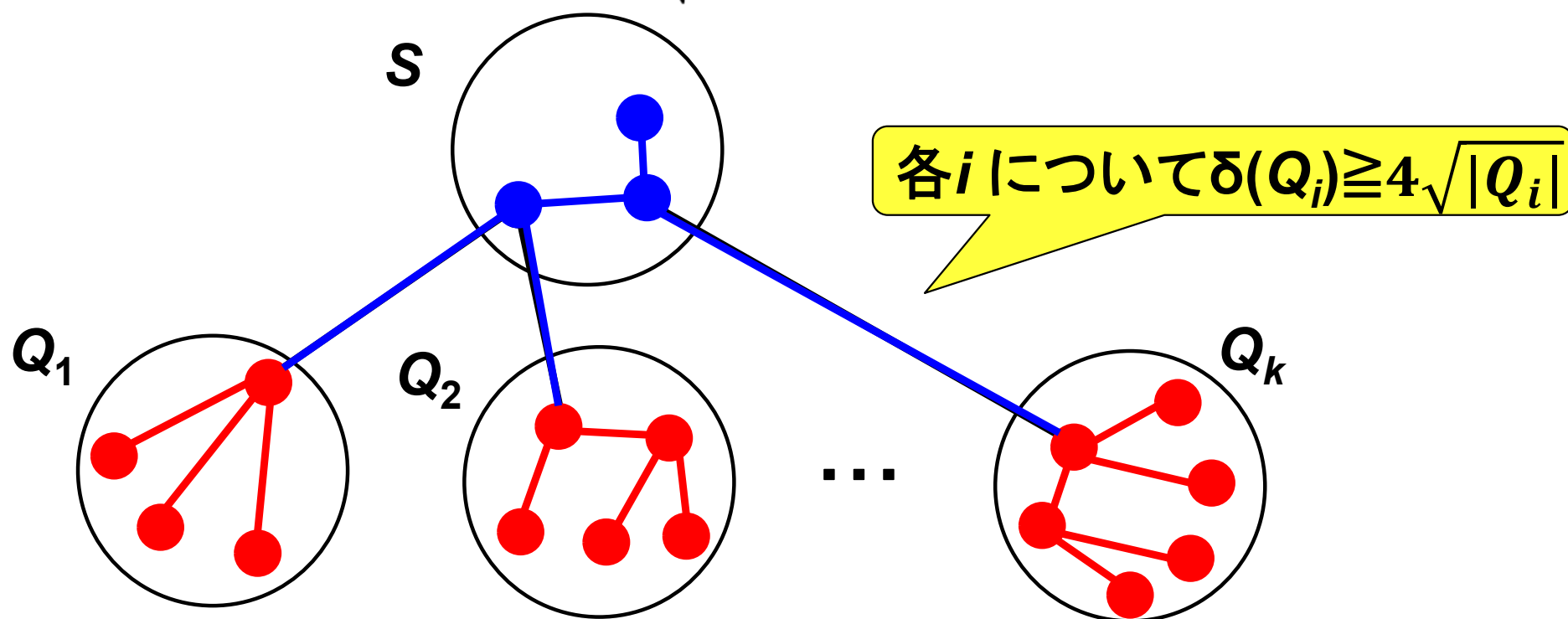


証明の概要(定理62, 63)

$S = \{v \in V(G) \mid \text{次数 } \alpha \text{ 未満}\}$

$\alpha = (n+2)/4$ (定理62),

$\alpha = \sqrt{(49 + 12\sqrt{13})n}$ (定理63).



定理 56 (Furuya, Saito and T, 2025)

$\delta(G) \geq 4\sqrt{n} \Rightarrow G$ は **HIST** を持つ.

今後の課題(未解決予想)

予想 1 (Malkevitch, 1978)

任意の4-連結平面グラフは**HIST**を持つ.

予想 2 (Hoffmann-Ostenhof, 2011)

任意の連結な3-正則グラフは**spanning tree**, **2-正則グラフ**, **1-正則グラフ** (**マッチング**)に分割できる. ただし, マッチングは空集合でもよい.

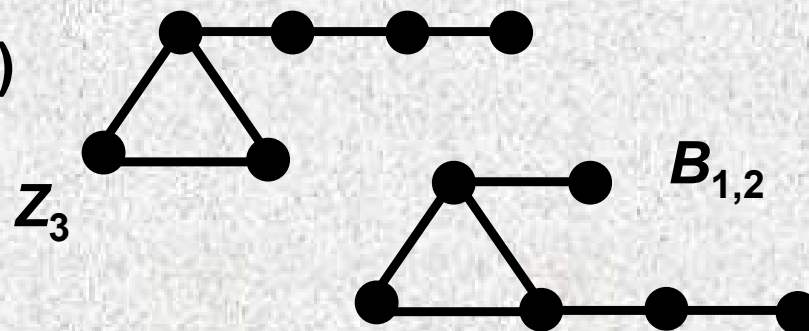
予想 3 (Chen, Han, O, Shan and T, 2017)

$\forall$ 3-連結 $\{H_1, H_2\}$ -free graph (頂点数十分大)

が**spanning Halin subgraph**を持つ $\Leftrightarrow$

(i) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, Z_3\}$, または

(ii) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$.

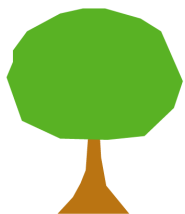




まとめ

- ・ネガティブな事柄からもある有益なものを見つける.
- ・普段と異なる場(他大学, 他分野, 海外など)に参加する.
- ・役立ちそうなものは取り入れる. ただし, 無理はしない.
- ・雑談(飲み会, 移動中, 学会の休憩中など)も意外と大事.





ご清聴ありがとうございました.

終

