禁止グラフ条件とその周辺

古谷 倫貴（関西学院大学）

今回の内容

1. 禁止グラフ条件とは
   - 定義
   - 小さいグラフの禁止
2. 遺伝的性質・アルゴリズム
3. 部分構造の発見
4. 禁止グラフが生成するクラス
   - 有限性
   - 差が小さい禁止グラフ
5. 不変量版ラムゼー問題

1. 禁止グラフ条件とは

1. 禁止グラフ条件とは

禁止グラフの定義

G をグラフとする.

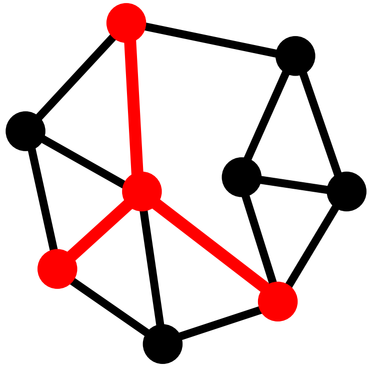
- グラフ H について,
  - G が H と同型なグラフを誘導部分グラフとして含むとき, $\boldsymbol{H \preccurlyeq G}$ と表す.
  - $H \not\preccurlyeq G$ であるとき, G は **H-free** であるという.
- グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, “$^{\forall}H \in \mathcal{H}$, G は H-free” を満たすとき, G は **$\mathcal{H}$-free** であるという.
- $\mathcal{H}$-free 性を考えるとき, $\mathcal{H}$ に属するグラフを**禁止グラフ**という.

1. 禁止グラフ条件とは

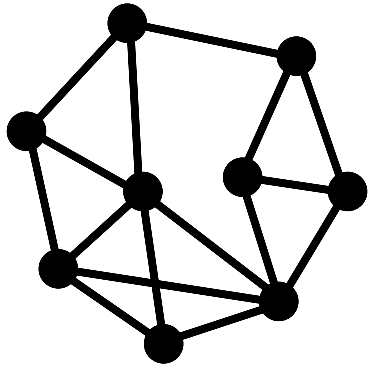
禁止グラフの定義

G をグラフとする.

- グラフ H について,
  - G が H と同型なグラフを誘導部分グラフとして含むとき, $\boldsymbol{H \preccurlyeq G}$ と表す.
  - $H \not\preccurlyeq G$ であるとき, G は **$\boldsymbol{H}$-free** であるという.
- グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, “$^{\forall}H \in \mathcal{H}$, G は H-free” を満たすとき, G は **$\boldsymbol{\mathcal{H}}$-free** であるという.

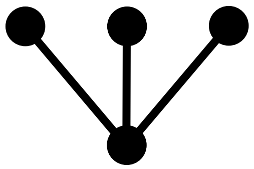


$K_{1,3}$-free ではない



$K_{1,3}$-free

$K_{1,3}$:

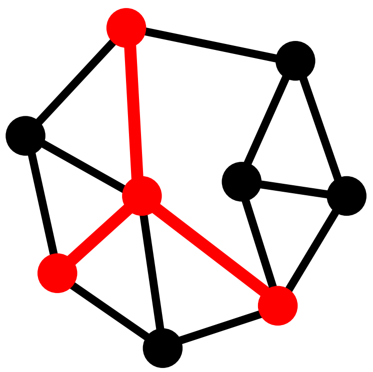


1. 禁止グラフ条件とは

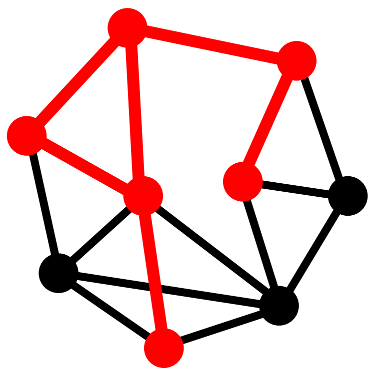
禁止グラフの定義

G をグラフとする.

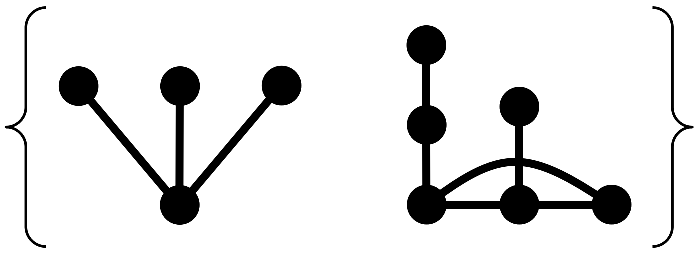
- グラフ H について,
  - ➢ G が H と同型なグラフを誘導部分グラフとして含むとき, $\boldsymbol{H \preccurlyeq G}$ と表す.
  - ➢ $H \not\preccurlyeq G$ であるとき, G は **$\boldsymbol{H}$-free** であるという.
- グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, “$\forall H \in \mathcal{H}$, G は H-free” を満たすとき, G は **$\boldsymbol{\mathcal{H}}$-free** であるという.



$\mathcal{H}$-free ではない



$\mathcal{H}$-free ではない

$\mathcal{H} =$ 

1. 禁止グラフ条件とは

禁止グラフ条件の強弱

■ $H_1 \preccurlyeq H_2$ を満たすグラフ H_1, H_2 について,

$$G \text{ が } H_1\text{-free} \Longrightarrow \ G \text{ は } H_2\text{-free}$$

が成り立つ.

特に

$$(H_1\text{-free グラフ全体}) \subseteq (H_2\text{-free グラフ全体})$$

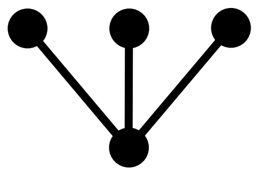
となる.

例

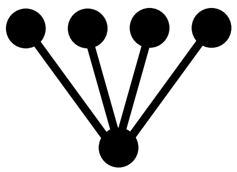
■ $K_{1,3}$-free グラフは $K_{1,4}$-free グラフである.

■ $K_{1,4}$-free だが $K_{1,3}$-free ではないグラフは色々存在する.
(内周の大きい cubic など)

$K_{1,3}$:



$K_{1,4}$:



1. 禁止グラフ条件とは

禁止グラフ条件の強弱

- グラフの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ が

$$^{\forall}H_2 \in \mathcal{H}_2,\quad ^{\exists}H_1 \in \mathcal{H}_1 \quad \text{s.t.} \quad H_1 \preccurlyeq H_2$$

を満たすとき，$\boldsymbol{\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2}$ と書く (Fujita et al., 2006).

- $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ を満たすグラフ H_1, H_2 について，

$$G \text{ が } \mathcal{H}_1\text{-free} \Longrightarrow G \text{ は } \mathcal{H}_2\text{-free}$$

が成り立つ.

特に

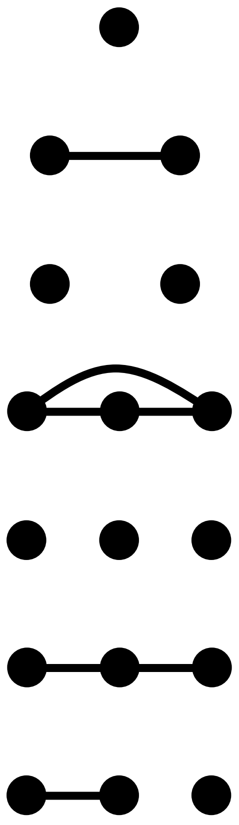
$$(\mathcal{H}_1\text{-free グラフ全体}) \subseteq (\mathcal{H}_2\text{-free グラフ全体})$$

となる.

1. 禁止グラフ条件とは

位数 3 以下の禁止グラフ

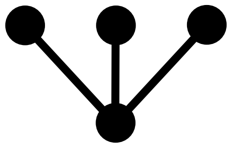
- G が K_1-free $\Leftrightarrow$ $V(G) = \emptyset$
- G が K_2-free $\Leftrightarrow$ $E(G) = \emptyset$ （$\Leftrightarrow G \simeq \overline{K_n}$）
- G が $\overline{K_2}$-free $\Leftrightarrow$ $G \simeq K_n$ （$\because$ G が H-free $\Leftrightarrow$ $\bar{G}$ が $\overline{H}$-free）
- G が K_3-free $\Leftrightarrow$ $\mathrm{girth}(G) \geq 4$
- G が $\overline{K_3}$-free $\Leftrightarrow$ $\alpha(G) \leq 2$
- G が P_3-free $\Leftrightarrow$ G の各連結成分が完全グラフ
- G が $(K_2 \cup K_1)$-free $\Leftrightarrow$ G は完全多部グラフ



1. 禁止グラフ条件とは

位数 4 の禁止グラフ

- $K_{1,3}$-free 性 (claw-free)



  - 本質的な “枝分かれ” や “Tutte 型集合” の制御
  - Ryjáček closure (Ryjáček, 1997)
    claw-free のハミルトン性の基本技法
  - Claw-free グラフの分類
    (“Claw-free graphs” I — VII; Chudnovsky and Seymour, 2007 — 2012)

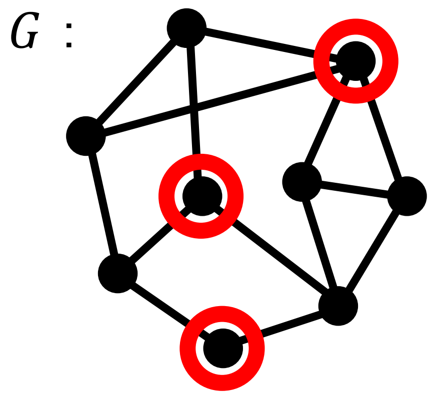
- P_4-free 性

  - 以下の性質 (complement-reducible) を満たす集合 $\mathcal{C}$ は P_4-free グラフ全体と一致
    - ✓ $K_1 \in \mathcal{C}$
    - ✓ $G \in \mathcal{C}$ かつ $|V(G)| \geq 2 \implies {}^{\exists}A, A' \in \mathcal{C}$（点素）s.t. $G = A \cup A'$ または $G = A + A'$
  - G が連結かつ P_4-free $\implies$ 全域部分グラフで，完全 2 部グラフとなるものが存在
    (Seinsche, 1974)

1. 禁止グラフ条件とは

path-free 性

- $S \subseteq V(G)$ がグラフ G の**支配集合**
  $\Leftrightarrow\ {}^{\forall}x \in V(G) \setminus S,\ N_G(x) \cap S \neq \emptyset$



G の支配集合

- P_5-free 性
  - G が連結かつ P_5-free
    $\Longrightarrow$ 支配集合 S で “S がクリークまたは $G[S] \simeq P_3$” となるものが存在
    (Bascó and Tuza, 1990 / Cozzens Kelleher, 1990)

- P_ℓ-free 性
  - G が連結かつ P_ℓ-free ($\ell \geq 5$)
    $\Longrightarrow$支配集合 S で “$G[S]$ が $P_{\ell-2}$-free または $G[S] \simeq C_\ell$” となるものが存在
    (Camby and Schaudt, 2016)

1. 禁止グラフ条件とは

禁止グラフを用いた研究

禁止グラフ条件が登場する場面は，大きく分けて 2 種類 (細かく分けて 4 種類)：

- ■ 遺伝的性質の特徴付け
- ■ グラフの各種性質の “良い” 十分条件
  - ➢ アルゴリズム
  - ➢ 部分構造の発見
  - ➢ 不変量のコントロール

2. 遺伝的性質・アルゴリズム

2. 遺伝的性質・アルゴリズム

遺伝的性質

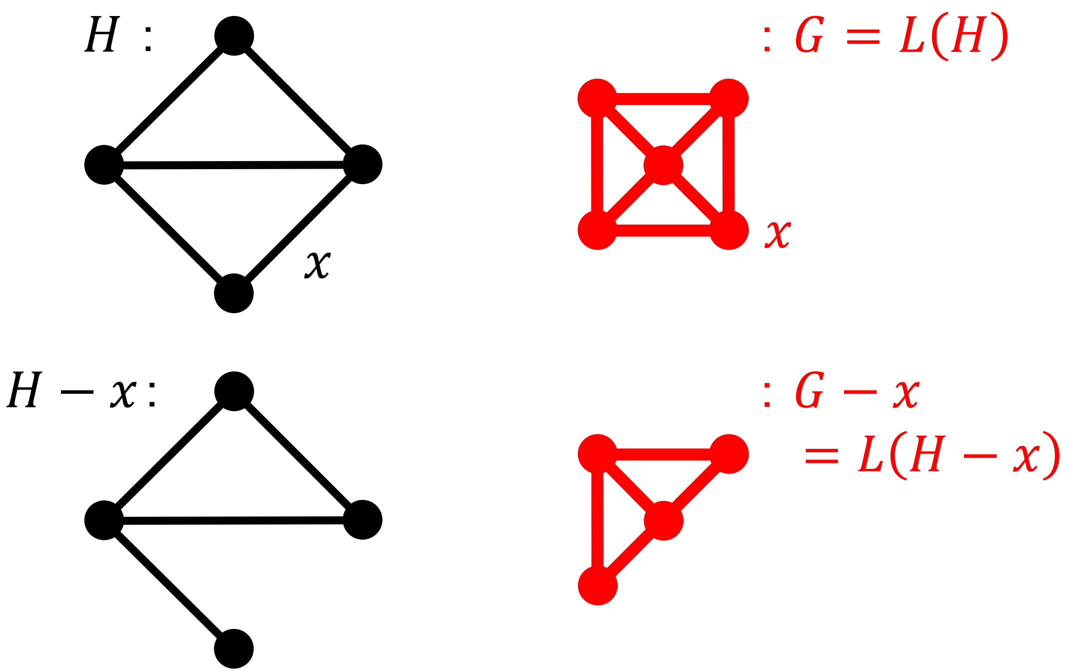
グラフに関する性質 P が

“P を満たすグラフ G の任意の誘導部分グラフは P を満たす”

を満たすとき，P は**遺伝的**であるという．

例

- G は 2 部グラフである．
- G はあるグラフのライングラフである．
- G は区間グラフである．



2. 遺伝的性質・アルゴリズム

遺伝的性質

グラフに関する性質 P が

“P を満たすグラフ G の任意の誘導部分グラフは P を満たす”

を満たすとき，P は**遺伝的**であるという．

命題 1.

遺伝的性質 P に対して，以下を満たすグラフの集合 $\mathcal{H}$ が存在する．

G が P を満たす $\Leftrightarrow$ G は $\mathcal{H}$-free

【証明】

P を満たさないグラフ全体からなる集合を $\mathcal{H}$ を考えれば良い． $\square$

⚠ $\mathcal{H}$ として，P を満たさない (非同型な) 頂点極小グラフ全体からなる集合を考えれば良い．
この集合は一意に定まる ($\boldsymbol{\mathcal{H}_P}$ とおく)．

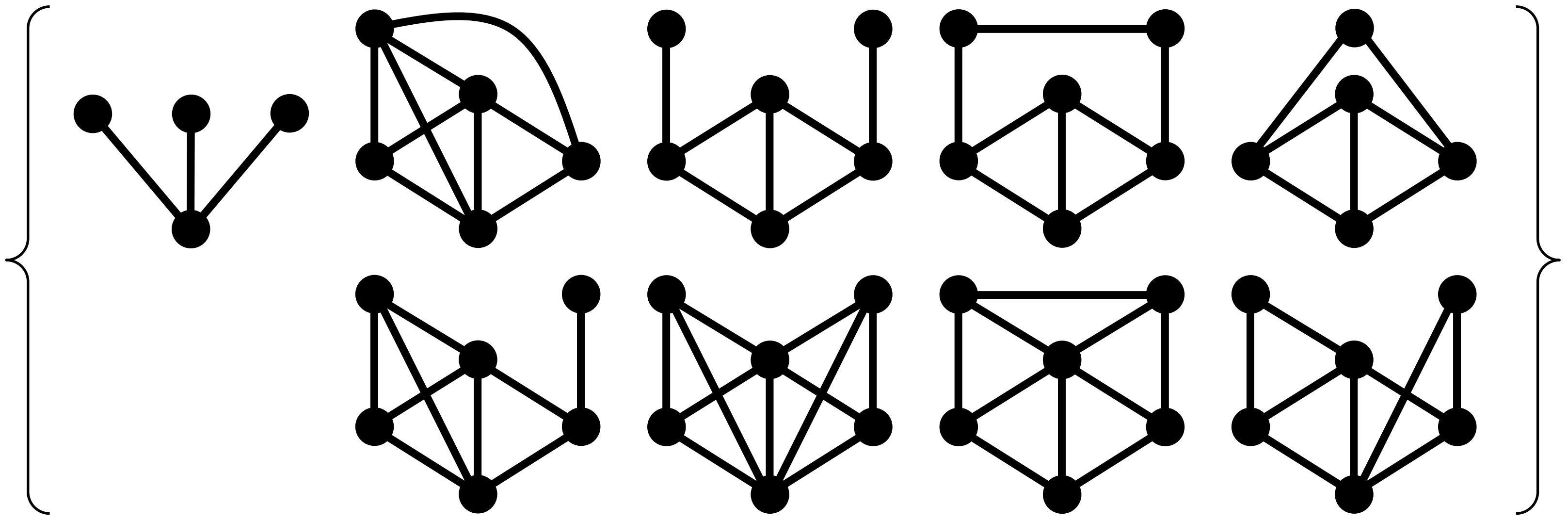
2. 遺伝的性質・アルゴリズム

遺伝的性質の特徴付け

- P：G は 2 部グラフである.

  $\Longrightarrow\ \mathcal{H}_P = \{C_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

- P：G はあるグラフのライングラフである.

  $\Longrightarrow\ \mathcal{H}_P =$ 

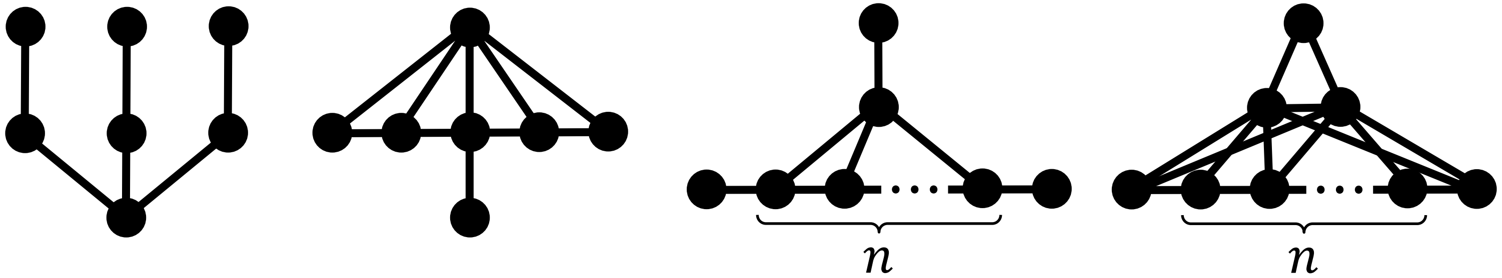
(Beineke, 1968 / Robertson, 1969)

2. 遺伝的性質・アルゴリズム

遺伝的性質の特徴付け

- P：G は区間グラフである.

$\Longrightarrow\ \mathcal{H}_P = \Big\{\ C_n\ (n \geq 4)$



$(n \geq 2)$　$(n \geq 1)$ $\Big\}$

(Lekkerkerker and Boland, 1962)

- P：G は理想グラフ (任意の誘導部分グラフ H について $\chi(H) = \omega(H)$)である.

$\Longrightarrow\ \mathcal{H}_P = \{C_{2n+1}, \overline{C_{2n+1}} : n \geq 2\}$ (強理想グラフ定理：Chudnovsky et al., 2006)

問題
$\mathcal{H}_P$ の要素の有限性 / 無限性に係わる遺伝的性質 P の特徴は何か.

2. 遺伝的性質・アルゴリズム

禁止グラフを用いた特徴付けの利用

- グラフの判定問題
  - 理想グラフの判定アルゴリズムの構築

    例：$O(|V|^9)$ 時間 (Chudnovsky et al., 2005)

    $O(|V|^7)$ 時間 (Chiu et al., 2022)
  - 認証付きアルゴリズム (グラフの判定に加え，その根拠の提示)

    例：$O(|V|+|E|)$ 時間でスプリットグラフであるかを判定し，更に以下を提示する：

    $\begin{cases} \text{スプリットグラフである} \rightarrow \text{具体的な分割} \\ \text{スプリットグラフでない} \rightarrow \text{禁止グラフ } (2K_2, C_4, C_5) \text{ の存在} \end{cases}$ (Kratsch et al., 2006)

- グラフ構造の把握
  - 具体例の構成
  - グラフクラスの大小の把握

2. 遺伝的性質・アルゴリズム

アルゴリズム

- 彩色
  - グラフ H が閉路を含むとき，任意の $k \geq 3$ に対して，H-free グラフの k-彩色可能性判定は NP-完全 (Kaminski and Lozin, 2007)
  - 任意の $k \geq 1$ に対して，P_5-free グラフの k-彩色可能性は多項式時間で判定可能 (Hoàng et al., 2010)
  - P_6-free グラフの 4-彩色可能性は多項式時間で判定可能 (Chudnovsky, Spirkl and Zhong, 2019)
  - P_6-free グラフの 5-彩色可能性判定は NP-完全 (Huang, 2016)
  - P_7-free グラフの 3-彩色可能性は多項式時間で判定可能 (Bonomo et al., 2018)
  - P_7-free グラフの 4-彩色可能性はNP-完全 (Huang, 2016)
  - 任意の $\ell \geq 8$ に対して，P_ℓ-free グラフの 3-彩色可能性が多項式時間で判定可能かは未解決

2. 遺伝的性質・アルゴリズム

アルゴリズム

- 支配数

入力 (G,k) $(G$：H-free グラフ， $k \geq 1)$ について

“$\gamma(G) \leq k$ であるか” の判定が NP-完全 $\Leftrightarrow$ H が $P_4 \cup mK_1$ の誘導部分グラフではない

(Korobitsin, 1992)

- 独立数 / クリーク数 / 頂点被覆数 …

- ハミルトン閉路の存在性

  - P_4-free グラフのハミルトン閉路の存在性は多項式時間で判定可能 (Corneil et al., 1981)
  - スプリットグラフ ($\subseteq P_5$-free グラフ) のハミルトン閉路の存在性判定はNP-完全 (Renjith, N.Sadagopan, 2017)
  - claw-free グラフのハミルトン閉路の存在性判定はNP-完全 (Li et al., 2000)

3. 部分構造の発見

3. 部分構造の発見

禁止グラフを用いた十分条件の起源

定理 2. (Sumner, 1974 / Las Vergnas, 1975)

偶位数の連結 claw-free グラフ G は完全マッチングを持つ.

【証明】

G が完全マッチングを持たないと仮定し，G の最小 Tutte 集合 $S \subseteq V(G)$ をとる.

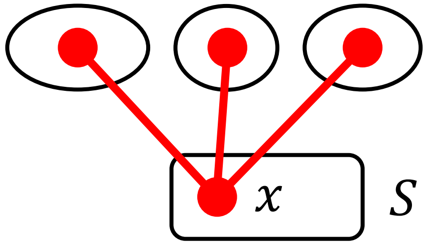
⚠ $S \subseteq V(G)$ が G の **Tutte 集合** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{odd}(G-S) > |S|$

すると $S \neq \emptyset$ かつ，任意の $x \in S$ が $G-S$ の少なくとも 3 つの奇成分と隣接する.

G が偶位数かつ連結

S の最小性

このとき，$K_{1,3} \preccurlyeq G$ となり，矛盾が生じる. □



3. 部分構造の発見

禁止グラフを用いた十分条件の起源

定理 2. (Sumner, 1974 / Las Vergnas, 1975)

偶位数の連結 claw-free グラフ G は完全マッチングを持つ.

各条件は必要？

- 偶位数性　… 禁止グラフで位数の偶奇のコントロールは (ほぼ) 不可能　**(本質的に) 必要**
- 連結性　… グラフが偶位数でも，連結成分が偶位数とは限らない　**必要**
- claw-free 性 … $K_{1,3}$ 自体が完全マッチングを持たない偶位数連結グラフ　**必要**

⚠ 一般に，“自明な必要条件” (位数の偶奇，連結性，連結度，次数条件など) は禁止グラフ条件とは別で仮定しておくことが多い.

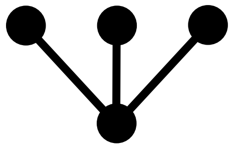
⚠ 簡単のため，以降は禁止グラフとして連結なもののみを考えることにする.

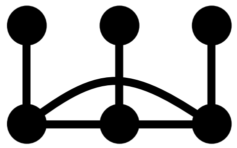
3. 部分構造の発見

ハミルトン性

ハミルトン道 / ハミルトン閉路の存在性を保証する (1 個の) 禁止グラフは何か？

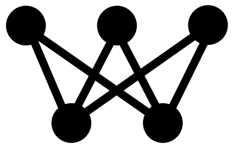
- 自明な必要条件はそれぞれ “連結” と “2-連結”.
- 下の 2 つのグラフはハミルトン道を持たない.

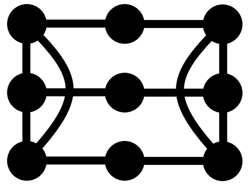




- これらに共通する (連結) 誘導部分グラフを禁止する必要がある.
- P_3 (またはその誘導部分グラフ) が “候補” となる.

- 下の 2 つのグラフはハミルトン閉路を持たない.





- これらに共通する (連結) 誘導部分グラフを禁止する必要がある.
- P_3 (またはその誘導部分グラフ) が “候補” となる.

3. 部分構造の発見

ハミルトン性

ハミルトン道 / ハミルトン閉路の存在性を保証する (1 個の) 禁止グラフは何か？

命題 3.

(1) 連結 P_3-free グラフはハミルトン道を持つ.

(2) 2-連結 P_3-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

1 個の禁止グラフにすべてを背負わせようとすると，極めて限定的になり得る.

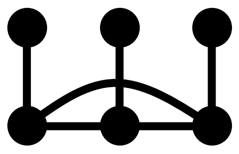
▶ 2 個 (以上) の禁止グラフにすると？

定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

(1) 連結 $\{K_{1,3}, N\}$-free グラフはハミルトン道を持つ.

(2) 2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

N :



3. 部分構造の発見

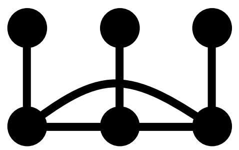
ハミルトン性

定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

（1）連結 $\{K_{1,3}, N\}$-free グラフはハミルトン道を持つ.

（2）2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

N :



（1）の禁止グラフは必要. （2）は…？

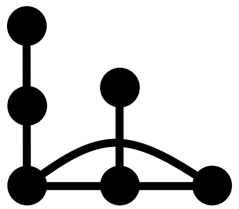
定理 5. (Broersma and Veldman, 1990)

2-連結 $\{K_{1,3}, P_6\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

定理 6. (Bedrossian, 1991)

2-連結 $\{K_{1,3}, B_{1,2}\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

$B_{1,2}$:



ハミルトン性

定理 7. (Bedrossian, 1991)

$|\mathcal{H}| = 2$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値.

（1）“2-連結 $\mathcal{H}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ” を満たす.

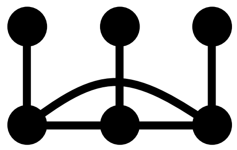
（2）以下のいずれかが成り立つ.

- ■ $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, N\}$
- ■ $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$
- ■ $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$

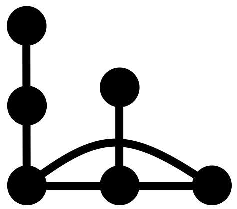
定理 8. (Faudree, Gould, Ryjáček and Schiermeyer, 1995)

位数が 10 以上の 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

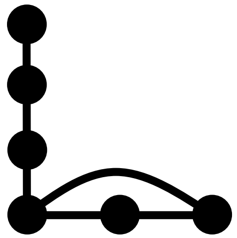
N :



$B_{1,2}$:



Z_3 :



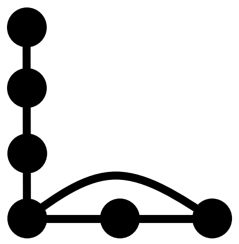
3. 部分構造の発見

ハミルトン性

定理 8. (Faudree, Gould, Ryjáček and Schiermeyer, 1995)

位数が 10 以上の 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

Z_3 :



位数が 9 の 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$-free グラフで，ハミルトン閉路を持たないものが存在

▶ 小さい (有限個の) 例外は認めて良いのでは？

3. 部分構造の発見

ハミルトン性

定理 9. (Faudree and Gould, 1997)

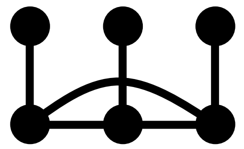
$|\mathcal{H}| = 2$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値.

（1）“位数が十分大きい 2-連結 $\mathcal{H}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ”を満たす.

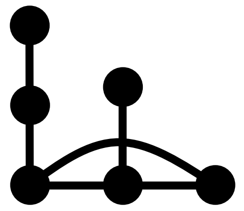
（2）以下のいずれかが成り立つ.

- $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, N\}$
- $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$
- $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, B_{1,2}\}$
- $\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, Z_3\}$

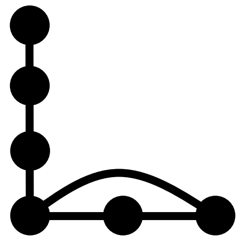
N :



$B_{1,2}$:



Z_3 :



3. 部分構造の発見

問題設定の確認

【目標】

性質 P に対して,

$$\mathcal{H}\text{-free グラフが } P \text{ を満たす}$$

となるような $\mathcal{H}$ を特徴付けたい.

【注意】

- $\mathcal{H}$ の要素数は適切に設定する.
- “自明な必要条件” は禁止グラフ条件とは別で仮定する.
  (位数の偶奇, 連結性, 連結度, 次数条件など)
- 位数が十分大きいグラフを対象とする.
  (“性質 P を満たさないグラフの無限列” に共通する構造が禁止グラフの候補)

3. 部分構造の発見

ハミルトン道

命題 10.

連結グラフ H について，以下は同値.

（1）“位数が十分大きい連結 H-free グラフはハミルトン道を持つ” を満たす.

（2）$H \preccurlyeq P_3$

定理 11. (Faudree and Gould, 1997)

$|\mathcal{H}| = 2$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値.

（1）“位数が十分大きい連結 $\mathcal{H}$-free グラフはハミルトン道を持つ” を満たす.

（2）$\mathcal{H} \leq \{K_{1,3}, N\}$

■ $|\mathcal{H}| = 3$ の場合の特徴付け (本質的に 5 種類に分類される)
(Gould and Harris, 1995 / 1998 / 1999)

3. 部分構造の発見

ハミルトン閉路

- $|\mathcal{H}| = 2$ の場合の特徴付け (Faudree and Gould, 1997・定理 9)
- **“すべての $\boldsymbol{\mathcal{H}}$-free グラフ”** に関する $|\mathcal{H}| = 3$ の場合の特徴付け (Brousek, 2002 / Faudree, Gould and Jacobson, 2004)
- **“位数が十分大きい $\boldsymbol{\mathcal{H}}$-free グラフ”** に関する $|\mathcal{H}| = 3$ の場合は
  - $K_{1,3} \notin \mathcal{H}$ の場合の特徴付けは完了 (Faudree, Gould, Jacobson and Lesniak, 2002 / Faudree, Gould and Jacobson, 2005)
  - $K_{1,3} \in \mathcal{H}$ の場合は (多分) 未解決

⚠ 禁止グラフの候補が列挙されている (Faudree, Gould and Jacobson, 2005) が，それらを禁止してハミルトン閉路が存在するかが不明.

3. 部分構造の発見

高連結度グラフのハミルトン閉路

- $|\mathcal{H}| = 2$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ で,

  “**3-連結** $\mathcal{H}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ”

  を満たすものの分析は多数 (cf. Fujisawa, 2013).
- Matthews-Sumner 予想 (4-連結 claw-free グラフはハミルトン閉路を持つ).
- 最小次数が 6 以上の 5-連結 claw-free グラフはハミルトン閉路を持つ (Kaiser and Vrána, 2012).
- k-連結 $\{K_{1,k+1}, P_4\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ (Chen, Egawa, Gould and Saito, 2012).

3. 部分構造の発見

完全マッチング

定理 2. (Sumner, 1974 / Las Vergnas, 1975)

偶位数の連結 claw-free グラフ G は完全マッチングを持つ.

定理 12. (Plummer and Saito, 2005)

連結グラフ H について，以下は同値.

（1）“位数が十分大きい偶位数の連結 H-free グラフは完全マッチングを持つ” を満たす.

（2）$H \preccurlyeq K_{1,3}$

- $|\mathcal{H}| = 2$ の場合の特徴付け (Fujita, Kawarabayashi, Lucchesi, Ota, Plummer and Saito, 2006)
- $|\mathcal{H}| = 3$ の場合の特徴付け (Ota, Plummer and Saito, 2011)

3. 部分構造の発見

完全マッチング

定理 12. (Plummer and Saito, 2005)

連結グラフ H について，以下は同値.

（1）“位数が十分大きい偶位数の連結 H-free グラフは完全マッチングを持つ” を満たす.

（2）$H \preccurlyeq K_{1,3}$

- $|\mathcal{H}| = 2$ の場合の特徴付け (Fujita, Kawarabayashi, Lucchesi, Ota, Plummer and Saito, 2006)
- $|\mathcal{H}| = 3$ の場合の特徴付け (Ota, Plummer and Saito, 2011)
- $|\mathcal{H}| = 2$ かつ “k-連結” の場合の特徴付け (Fujisawa, Fujita, Plummer, Saito and Schiermeyer, 2011)

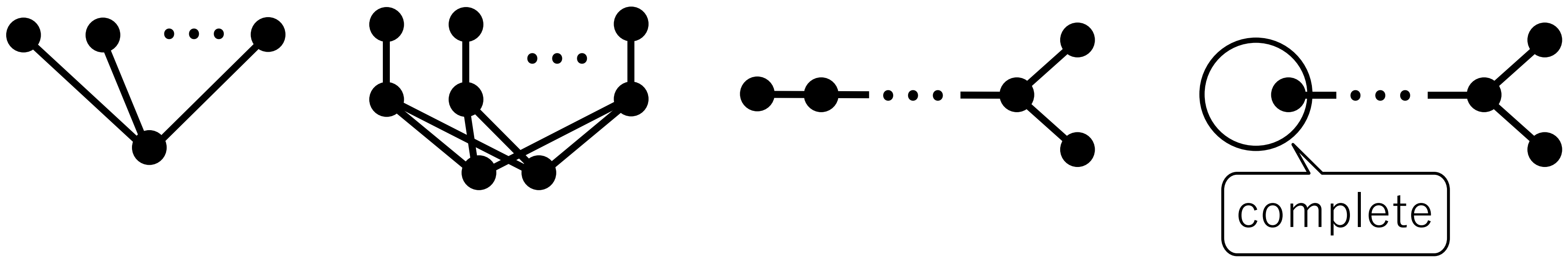
3. 部分構造の発見

完全マッチング

- 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ で

  “位数が十分大きい偶位数の連結 $\mathcal{H}$-free グラフは完全マッチングを持つ”

  を満たすものの特徴付け (Ota and Sueiro, 2013)

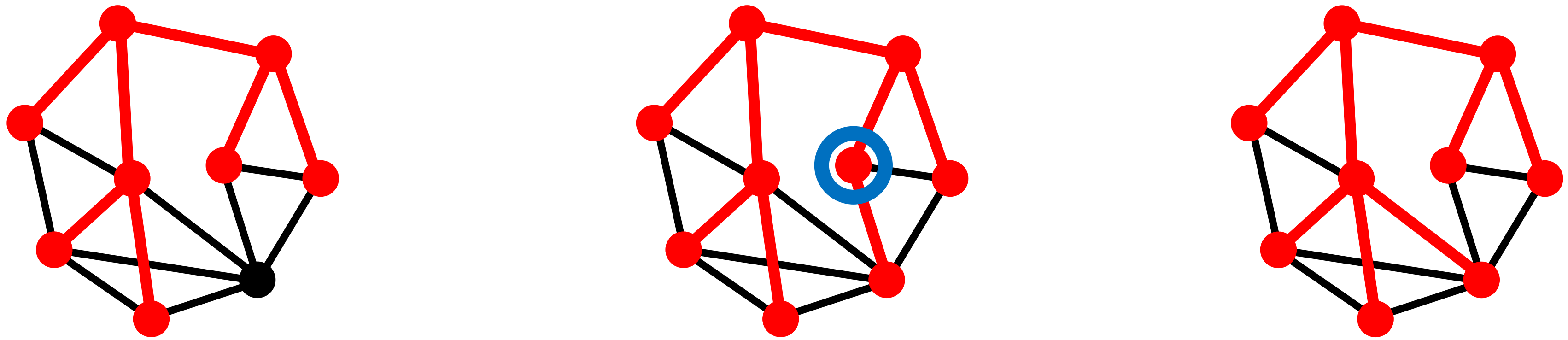


- 上の結果から “$|\mathcal{H}| = k$ 版” の記述も可能.
- 準完全マッチングに関する同様の特徴付け (Ota, Ozeki and Sueiro, 2013)

3. 部分構造の発見

HIST

- 次数 2 の頂点を持たない木を **HIT** という．
- グラフの全域木で HIT であるものを，**HIST** という．



(部分グラフとしての) HIT　　HIST ではない全域木　　HIST

3. 部分構造の発見

HIST

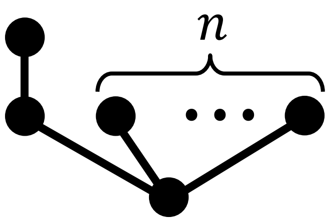
- 次数 2 の頂点を持たない木を **HIT** という.
- グラフの全域木で HIT であるものを，**HIST** という.

定理 13. (F. and Tsuchiya, 2013)

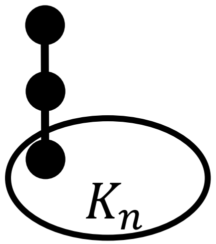
連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値.

(1) “位数が十分大きい連結 $\mathcal{H}$-free グラフは HIST を持つ” を満たす.

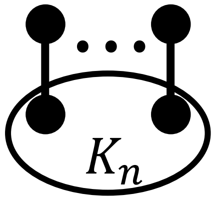
(2) $\mathcal{H} \leq \{ P_n,\ K_{2,n},$



,



,



$\}$ $(^{\exists}n \geq 3)$

3. 部分構造の発見

HIST

- "連結 H-free グラフ G は位数 $\Omega(|V(G)|)$ の HIT を部分グラフに持つ" が成り立つ $\Leftrightarrow H \preccurlyeq P_7$ (**F.** and Tsuchiya, 2020).
- 位数が十分大きい連結 P_ℓ-free グラフ G は位数

$$\begin{cases} |V(G)|-1 & (\ell=4) \\ |V(G)|-2 & (\ell=5) \\ (|V(G)|+1)/2 & (\ell=6) \\ (|V(G)|+3)/3 & (\ell=7) \end{cases}$$

  以上の HIT を部分グラフに持つ
  (**F.** and Tsuchiya, 2013 / Diemunsch, **F.**, Sharifzadeh, Tsuchiya, Wang, Wise and Yeager, 2015 / **F.** and Tsuchiya, 2020).
- "次数 2 の頂点を定数個認めた全域木の存在性" の禁止グラフの決定
  (**F.** and Tsuchiya, 2024).

3. 部分構造の発見

その他の興味深い結果 ※ 適当に列挙

- ハミルトン連結のための禁止ペア
  (cf. Liu, Ryjáček, Vrána, Xiong and Yang, 2023 / Kabela, Ryjáček, Skyvová and Vrána, 2025)
  - 特徴付けまで残り 1 種類
- 最大次数 k 以下の全域木 (k-木) のための禁止ペア (Maezawa and Ozeki, 2022)
  - Ota-Sugiyama 予想 (2010) の解決
- 2-因子のための禁止ペア
  - 2-連結性 (Faudree, Faudree and Ryjáček, 2008)
  - 最小次数 2 以上 (Fujisawa and Saito, 2012)
- 禁止グラフ条件の一致
  - “グラフが t-タフである” ための禁止グラフ条件 (Ota and Sueiro, 2013).
  - “グラフが 2-歩道を持つ” ための禁止グラフ条件 (**F.**, 2014).
    ※ “1/2-タフである” ための禁止グラフ条件と一致

⚠ グラフ G が 2-歩道を持つならば，G は 1/2-タフ.

3. 部分構造の発見

禁止グラフに関するマクロな問い

問題

“十分条件となる禁止グラフの特徴付け” の難易を決める要因は何か.

問題

付与する条件 (2-連結 vs $\delta \geq 2$ など) で生じる禁止グラフの差を観察する意味があるか.

問題

(1/2-タフ vs 2-walk 以外で) 異なる性質を保証する禁止グラフ条件が一致する例はあるか.

禁止グラフ条件の一致は何を意味するか.

4. 禁止グラフが生成するクラス

4. 禁止グラフが生成するクラス

有限個のグラフを生成する禁止グラフ条件

“$\mathcal{H}$-free グラフが有限個” となるとき，任意の性質 P に対して

“位数が十分大きい $\mathcal{H}$-free グラフは P を満たす”

となる．

- $\mathcal{H}$ は P のための禁止グラフと見なされるが，P の情報を一切考慮していない．
- このような $\mathcal{H}$ は事前に特定しておくべき．

命題 14. (cf. Diestel “Graph Theory”)

連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値．

(1) “連結 $\mathcal{H}$-free グラフは有限個” を満たす．

(2) $\mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$ $({}^{\exists}n \geq 3)$

4. 禁止グラフが生成するクラス

有限個のグラフを生成する禁止グラフ条件

命題 14. (cf. Diestel “Graph Theory”)

連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値.

(1) “連結 $\mathcal{H}$-free グラフは有限個” を満たす.

(2) $\mathcal{H} \leq \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$ ($^\exists n \geq 3$)

【(2) ⟹ (1) の証明】

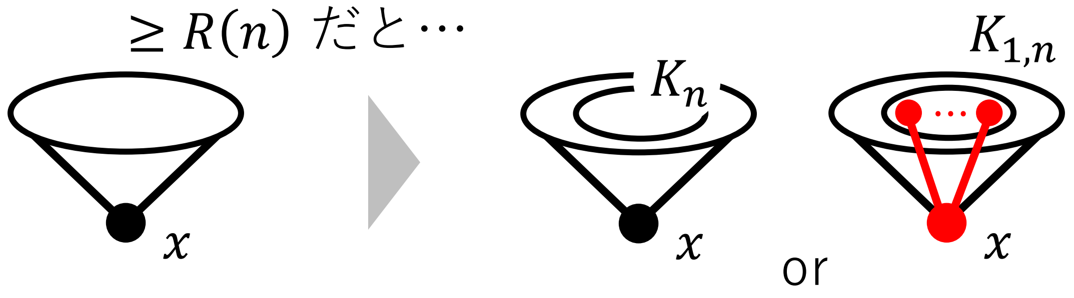
連結 $\{K_n, K_{1,n}, P_n\}$-free グラフ G に対して,

- ■ $\Delta(G) \leq R(n) - 1$

ラムゼー数

- ■ $\mathrm{diam}(G) \leq n - 2$ （$\because$ P_n-free 性）

よって $|V(G)| \leq \Delta(G)^{\mathrm{diam}(G)} \leq (R(n) - 1)^{n-2}$. □



4. 禁止グラフが生成するクラス

連結度

“k-連結 $\mathcal{H}$-free グラフが有限個” となる $\mathcal{H}$ について

- $|\mathcal{H}| = 2$ かつ $k \leq 6$ の場合の特徴付け (Fujisawa, Plummer and Saito, 2013).
  (例：5-連結 $\{K_{1,3}, K_4\}$-free グラフは二十面体グラフに限られる)
- $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $k = 2$ の場合の特徴付け (Fujisawa, Plummer and Saito, 2013).
- $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $k = 3$ の場合の特徴付けは未解決 (残り 5 種類？)
  (cf. Egawa, Fujisawa, **F.**, Plummer and Saito, 2015 / Egawa, 2025).

最小次数

“最小次数が k 以上の $\mathcal{H}$-free グラフが有限個” となる $\mathcal{H}$ について

- $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $k = 3$ のとき，特徴付けは未解決 (残り有限種類)
  (cf. Egawa and **F.**, 2022)

4. 禁止グラフが生成するクラス

染色数との関係

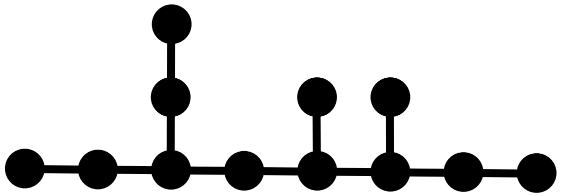
定理 15. (Chudnovsky and Stacho, 2018)

$\{C_3, C_4, P_8\}$-free グラフ G は $\chi(G) \leq 3$ を満たす.

定理 16. (Chudnovsky and Stacho, 2018)

最小次数が 3 以上の連結 $\{C_3, C_4, P_8\}$-free グラフ G は以下のいずれかである.

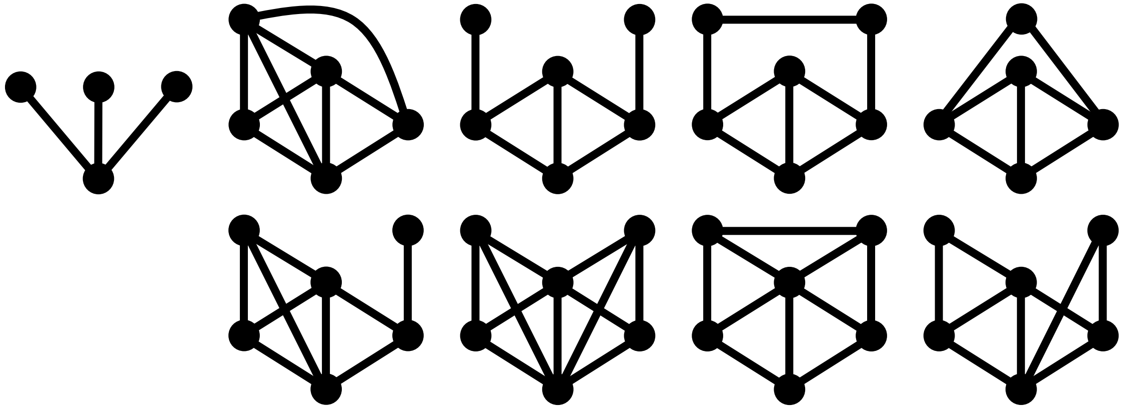
- ペテルセングラフ
- ヒーウッドグラフ
- ヒーウッドグラフの 1 本の辺を縮約して得られたグラフ

同じ方針で $\left\{ C_3, C_4, \right.$  $\left. \right\}$-free グラフの染色数が定数値以下であることが示される.

4. 禁止グラフが生成するクラス

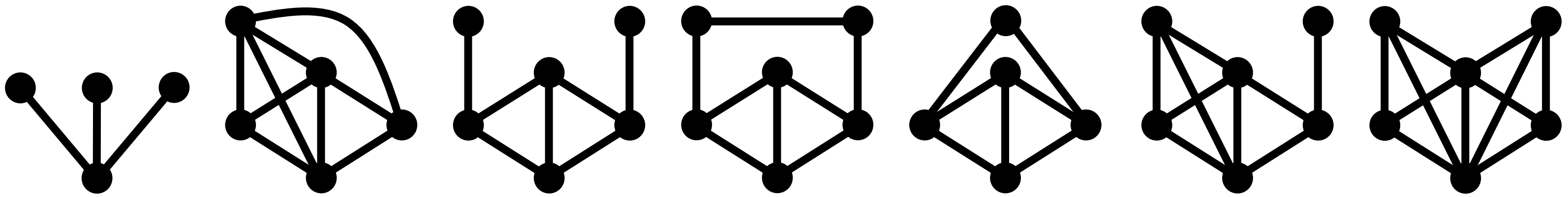
禁止グラフの等価

■ グラフ G がライングラフ

$\Leftrightarrow$ G が {  }-free

本質的に “等しい”
禁止グラフ条件

定理 16. (Soltes, 1994)

5 個の例外を除き，{  }-free グラフはライングラフである．

4. 禁止グラフが生成するクラス

禁止グラフの強弱・等価

- グラフの集合 $\mathcal{H}$ に対し，$\mathcal{G}(\mathcal{H})$ を連結 $\mathcal{H}$-free グラフ全体からなる集合とする．

問題

連結グラフの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ で，以下を満たすものの特徴は何か．

- $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$
  (本質的に ($\mathcal{H}_1$-free グラフ全体) $\subseteq$ ($\mathcal{H}_2$-free グラフ全体))
- $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$
  (本質的に ($\mathcal{H}_1$-free グラフ全体) $=$ ($\mathcal{H}_2$-free グラフ全体))

4. 禁止グラフが生成するクラス

禁止グラフの強弱・等価

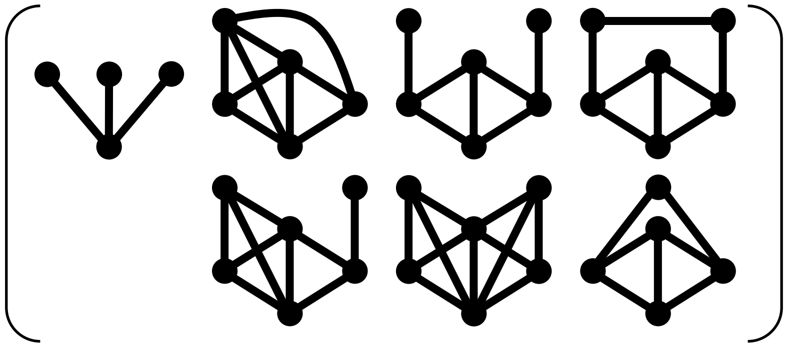
命題 17.

- $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.

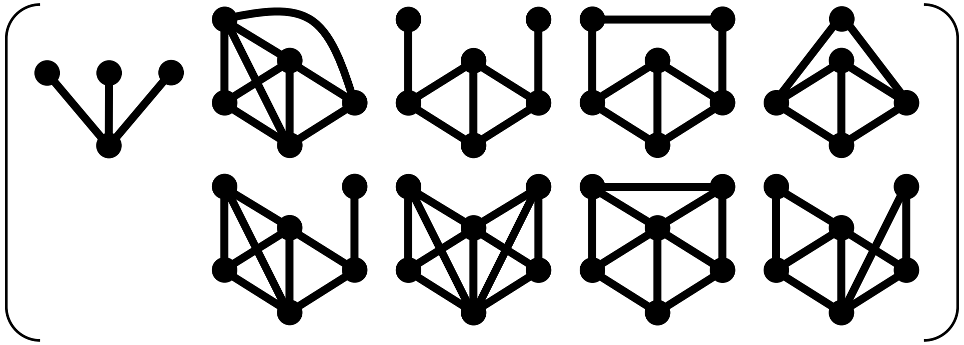
$\mathcal{H}_1 \not\leq \mathcal{H}_2$ でも $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$ を満たす場合がある.

例

$\Bigg|\, \mathcal{G}$



$\setminus \mathcal{G}$



$\Bigg| = 5$

4. 禁止グラフが生成するクラス

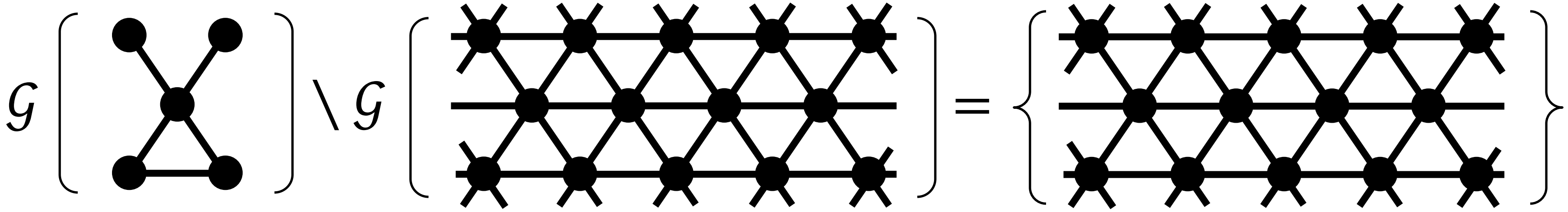
禁止グラフの強弱・等価

命題 17.

- $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.
- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ならば $|\mathcal{G}(\mathcal{H}_1) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H}_2)| < \infty$.

$H_1 \not\leq H_2$ でも $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ を満たす場合がある.

例



6-reg. tri. on torus
(rep. : suff. large)

4. 禁止グラフが生成するクラス

禁止グラフの強弱・等価

定理 18. (Fujita, F. and Ozeki, 2013)

位数が 3 以上の連結グラフ H_1, H_2 について，$H_1 \not\preccurlyeq H_2$ かつ $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ が成り立つならば，以下のすべてが成り立つ.

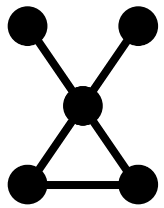
（1）$\delta(H_1) = 1$，$\Delta(H_1) = |V(H_1)| - 1$.

（2）${}^{\exists}x_1, x_2 \in V(H_1)$ s.t. $x_1 \neq x_2$ かつ $N_G(x_1) = N_G(x_2)$.

（3）${}^{\exists}y_1, y_2 \in V(H_1)$ s.t. $y_1 \neq y_2$ かつ $N_G[y_1] = N_G[y_2]$.

（4）$|V(H_2)| \geq 2|V(H_1)| - 3$，$\delta(H_2) \geq |V(H_1)| - 2$.

右図は（1）〜（3）を満たす最小のグラフ.



4. 禁止グラフが生成するクラス

禁止グラフの強弱・等価

定理 18. (Fujita, F. and Ozeki, 2013)

位数が 3 以上の連結グラフ H_1, H_2 について，$H_1 \not\preccurlyeq H_2$ かつ $|\mathcal{G}(\{H_1\}) \setminus \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty$ が成り立つならば，以下のすべてが成り立つ．

（1）$\delta(H_1) = 1$，$\Delta(H_1) = |V(H_1)| - 1$.

（2）$^{\exists} x_1, x_2 \in V(H_1)$ s.t. $x_1 \neq x_2$ かつ $N_G(x_1) = N_G(x_2)$.

（3）$^{\exists} y_1, y_2 \in V(H_1)$ s.t. $y_1 \neq y_2$ かつ $N_G[y_1] = N_G[y_2]$.

（4）$|V(H_2)| \geq 2|V(H_1)| - 3$，$\delta(H_2) \geq |V(H_1)| - 2$.

系 18.1.

位数が 2 以上の連結グラフ H_1, H_2 について，

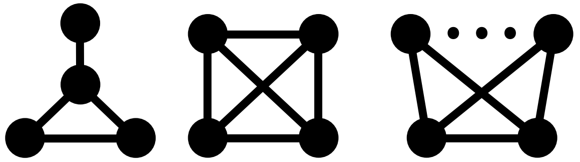
$$|\mathcal{G}(\{H_1\}) \triangle \mathcal{G}(\{H_2\})| < \infty \Leftrightarrow H_1 \simeq H_2.$$

禁止グラフの強弱・等価

定理 19. (Fujita, F. and Ozeki, 2013)

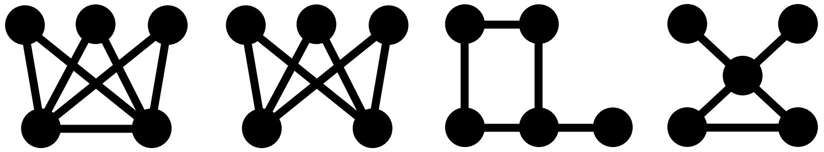
位数が 3 以上の連結グラフ H と $|\mathcal{H}| \leq 3$ を満たす連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，
$H \notin \mathcal{H}$ かつ $|\mathcal{G}(\{H\}) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H})| < \infty$ が成り立つならば，$|\mathcal{H}| = 3$ かつ $H \simeq C_3$.

例

$\Bigg| \mathcal{G}(C_3) \triangle \mathcal{G}\Bigg($

$\Bigg)\Bigg| < \infty$

4. 禁止グラフが生成するクラス

star-free 性

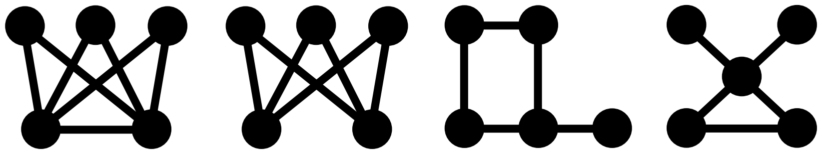
- 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ で $\left|\mathcal{G}(\{K_{1,m}\}) \triangle \mathcal{G}(\mathcal{H})\right| < \infty$ を満たすものの特徴付け (Fujisawa, Ota, Ozeki and Sueiro, 2011).
- $\left|\mathcal{G}_4(\{K_{1,3}\}) \triangle \mathcal{G}_4\left(\right.\right.$  $\left.\left.\right)\right| < \infty$ (**F.** and Yokota, 2019).

ただし，$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ を k-連結 $\mathcal{H}$-free グラフ全体からなる集合とする.

定理 20. (F. and Yokota, 2019)

以下は同値.

（1）Matthews-Sumner 予想 (4-連結 claw-free グラフはハミルトン閉路を持つ).

（2）4-連結 $\left\{\right.$  $\left.\right\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

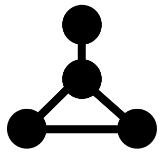
4. 禁止グラフが生成するクラス

禁止グラフの強弱・等価

問題

2 つの集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の強弱や等価は有限性だけで語って良いか.

定理 21. (Olariu, 1988)

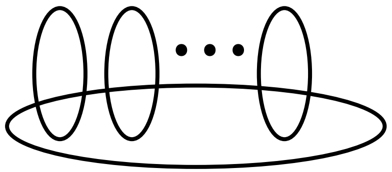
$\mathcal{G}(\{C_3\}) \triangle \mathcal{G}$ () $= \{$完全 k 部グラフ $(k \geq 3)\}$.

⚠ C_3-free グラフに関する命題は，完全 k 部グラフのチェックだけで Z_1-free グラフの命題に拡張 (または反例の特定) が可能.

4. 禁止グラフが生成するクラス

禁止グラフの強弱・等価

定理 22. (F. and Tsuchiya, 2015)

$\mathcal{G}(\{K_{1,3}, B_{1,2}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, N\}) = \Bigg\{$  $\Bigg\}$ (楕円は完全グラフ).

定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

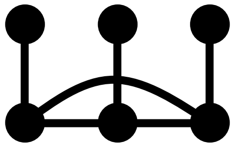
(2) 2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

定理 6. (Bedrossian, 1991)

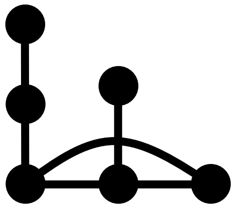
2-連結 $\{K_{1,3}, B_{1,2}\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.

⚠ 定理 4 と定理 22 より定理 6 が導かれる.

N :



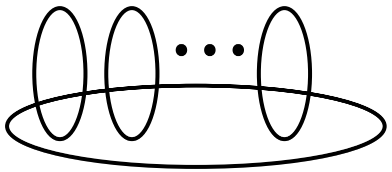
$B_{1,2}$:



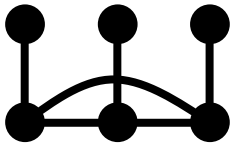
4. 禁止グラフが生成するクラス

禁止グラフの強弱・等価

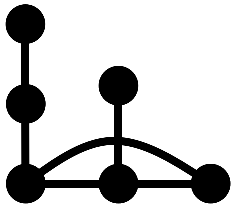
定理 22. (F. and Tsuchiya, 2015)

$\mathcal{G}(\{K_{1,3}, B_{1,2}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, N\}) = \left\{ \right.$  $\left. \right\}$ (楕円は完全グラフ).

N :



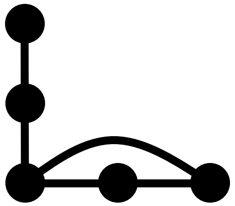
$B_{1,2}$:



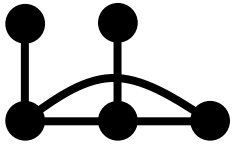
■ 以下の (明示的な) 特徴付け (Chen, **F.**, Shan, Tsuchiya and Yang, 2019).

- ➢ $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, B_{1,2}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, P_6\})$
- ➢ $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, Z_2\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, B_{1,1}\})$
- ➢ $\mathcal{G}(\{K_{1,3}, B_{1,1}\}) \setminus \mathcal{G}(\{K_{1,3}, P_5\})$

Z_2 :



$B_{1,1}$:



5. 不変量版ラムゼー問題

5. 不変量版ラムゼー問題

不変量のコントロール

- サイズなど
  - K_{r+1}-free グラフのサイズ (Turán, 1941)
  - $\{K_{r+1}, H\}$-free グラフのサイズ (Loh, Tait and Timmons, 2018)
  - wheel-free グラフの三角形の個数
    (Gallai-Zelinka 問題, cf. Füredi, Goemans and Kleitman, 1994)
- χ-bounded 性
  - グラフの集合 $\mathcal{G}$ が χ-bounded $\Leftrightarrow$ $^{\exists}f_{\mathcal{G}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s.t. $^{\forall}G \in \mathcal{G},\ \chi(G) \leq f_{\mathcal{G}}(\omega(G))$
  - $\{C_{2n+1} : n \geq 2\}$-free グラフからなる集合は χ-bounded (Scott and Seymour, 2016)
  - Gyárfás–Sumner 予想 (任意の木 T に対して，T-free グラフからなる集合は χ-bounded)
- クリーク数・独立数
  - Erdős–Hajnal 予想 ($^{\forall}H$, $^{\exists}\delta_H > 0$：定数 s.t. $^{\forall}H$-free グラフ G, $\max\{\omega(G), \alpha(G)\} \geq |V(G)|^{\delta_H}$)

5. 不変量版ラムゼー問題

Ramsey の定理の解釈

定理 23. (Ramsey, 1930)

$^\forall n \in \mathbb{N}$, $^\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. 任意の 2-辺着色完全グラフ K_r には単色の K_n が含まれる.

定理 23'.

グラフの集合 $\mathcal{H}$ について, 以下は同値.

(1) "$\mathcal{H}$-free グラフは有限個" を満たす.

(2) $\mathcal{H} \leq \{K_n, \overline{K_n}\}$ ($^\exists n \geq 3$)

⚠ (2) ⇒ (1) は Ramsey の定理そのもの.
(1) ⇒ (2) は "$\{K_r : r \in \mathbb{N}\}$ と $\{\overline{K_r} : r \in \mathbb{N}\}$ が無限集合なので $\mathcal{H}$-free でないグラフを含む" という事実より.

5. 不変量版ラムゼー問題

Ramsey の定理の解釈

定理 23'.

グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値.

(1) "$\mathcal{H}$-free グラフは有限個" を満たす.

(2) $\mathcal{H} \leq \{K_n, \overline{K_n}\}$ $({}^{\exists}n \geq 3)$

"連結版" Ramsey の定理

命題 14. (cf. Diestel "Graph Theory")

連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ について，以下は同値.

(1) "連結 $\mathcal{H}$-free グラフは有限個" を満たす.

(2) $\mathcal{H} \leq \left\{K_n, K_{1,n}, P_n\right\}$ $({}^{\exists}n \geq 3)$

位数を最も制限する禁止条件の特定

5. 不変量版ラムゼー問題

不変量版ラムゼー問題

問題 (不変量版ラムゼー問題)

不変量 μ に対して，連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ で性質

(P-$\boldsymbol{\mu}$) $^\exists$定数 $c = c(\mathcal{H})$ s.t. $^\forall$連結 $\mathcal{H}$-free グラフ G は $\mu(G) \le c$ を満たす

を満たすものを特定せよ.

- 連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ が (P-$|V(*)|$) を満たす ⇔ $\mathcal{H} \le \{K_n, K_{1,n}, P_n\}$ ($^\exists n \ge 3$) (命題 14)
- Gyárfás–Sumner 予想 (任意の木 T に対して，T-free グラフからなる集合は χ-bounded) は次の命題と同値：

  連結グラフの有限集合 $\mathcal{H}$ が (P-χ) を満たす ⇔ $\mathcal{H} \le \{K_n, T\}$ ($^\exists n \ge 3$, $^\exists T$：木)

5. 不変量版ラムゼー問題

支配数のラムゼー問題

■ グラフ G の支配集合の最小サイズを G の**支配数**といい，$\boldsymbol{\gamma(G)}$ で表す．

定理 24. (Cockayne, Ko and Shepherd, 1985)

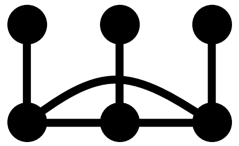
連結 $\{K_{1,3}, N\}$-free グラフ G は $\gamma(G) \leq \lceil |V(G)|/3 \rceil$ を満たす．

⚠ P_n は $\{K_{1,3}, N\}$-free かつ $\gamma(P_n) = \lceil |V(P_n)|/3 \rceil$ を満たす．
特に定理 24 は最善である．

定理 4. (Duffus, Gould and Jacobson, 1981)

(1) 連結 $\{K_{1,3}, N\}$-free グラフはハミルトン道を持つ．

N :



5. 不変量版ラムゼー問題

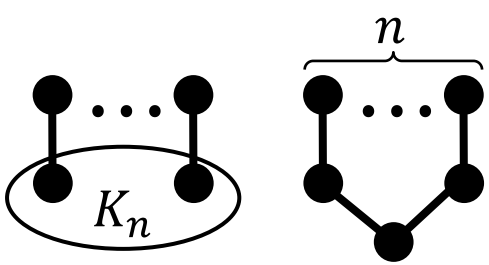
支配数のラムゼー問題

■ グラフ G の支配集合の最小サイズを G の**支配数**といい，$\boldsymbol{\gamma(G)}$ で表す．

定理 25. (F., 2018)

連結グラフの集合 $\mathcal{H}$ が (P-γ) を満たす

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{H} \le \Bigg\{$



$P_n \Bigg\}$ $(^{\exists} n \ge 3)$

5. 不変量版ラムゼー問題

道被覆数 / 道分割数のラムゼー問題

G をグラフとする.

- $\mathcal{P}$ が G の**道被覆** / **道分割**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ➢\ {}^{\forall}P \in \mathcal{P},\ P \text{ は } G \text{ の部分道，かつ} \\ ➢\ \displaystyle\bigcup_{P\in\mathcal{P}} V(P) = V(G) \ \Big/ \ \coprod_{P\in\mathcal{P}} V(P) = V(G) \end{cases}$$

- G の道被覆 / 道分割の最小サイズを**道被覆数** / **道分割数**といい，$\mathbf{pc}(G)$ / $\mathbf{pp}(G)$ で表す.

- (P-pc) や (P-pp) を満たす連結グラフの有限集合 $\mathcal{H}$ の特徴付け (Chiba and **F.**, 2022).

5. 不変量版ラムゼー問題

道被覆数 / 道分割数のラムゼー問題

(P-pc) / (P-pp) の解決

道以外の被覆 / 分割は？

星被覆 / 星分割は支配数
(解決済み)

“誘導道” 版の解決
(P-indpc) / (P-indpp)

“誘導星” 版の解決
(P-indsc) / (P-indsp)

“誘導道と誘導星のペア” は $\overline{K_n}$ の (連結版の) 代用品
(cf. オリジナルの Ramsey の定理 vs 連結版 Ramsey
染色数
特に indspc / indspp は indep. 被覆数 / indep. 分割数 の連結版

5. 不変量版ラムゼー問題

誘導星-道被覆数 /誘導星-道分割数のラムゼー問題

- (P-indspc) や (P-indspp) を満たす連結グラフの有限集合 $\mathcal{H}$ の特徴付け (Chiba and **F.**, 2024).
- indep. 被覆数 (＝染色数) のラムゼー問題の連結版類似の解決.

Gyárfás–Sumner 予想

- 任意のグラフ G について $\chi(G) \leq \mathrm{indspc}(G)/2 \leq \mathrm{indspp}(G)/2$

問題
“本質的に $\chi(G) \leq \mu(G) \leq \mathrm{indspc}(G)/2$ を満たす” 不変量 μ を上手く設定し, ラムゼー問題を解け.

まとめ

- 禁止グラフ条件はグラフ理論の様々な問題で登場する.
- 各性質と禁止グラフの間の関係は，まだ謎が多い…
- 禁止グラフ条件を満たすグラフのクラスに注意せよ.
  - 条件を満たすものが有限個の可能性がある.
  - ２つの禁止グラフ条件が “本質的に” 強弱・等価である可能性がある.
- ラムゼー問題を考えるのに値する不変量募集中.

ご清聴ありがとうございました.