

# 格子凸多面体と可換代数とグラフ理論と

## Part I

土谷 昭善

東邦大学・理学部

第 22 回組合せ論若手研究集会  
慶應義塾大学 矢上キャンパス  
2026 年 2 月 20 日



Toho University

## イントロダクション

凸多面体の数え上げ組合せ論

グラフに付随する格子凸多面体

辺凸多面体

対称辺凸多面体

PQ 型隣接凸多面体

# 凸多面体とグラフ理論

グラフ理論と凸多面体の関係は、組合せ最適化の研究から発展した。

1950～60年代：

- ▶ 線形計画法の発展
- ▶ 組合せ問題を凸多面体として記述

代表例：

- ▶ マッチング凸多面体 (Edmonds, 1965)
- ▶ カット凸多面体
- ▶ 安定集合凸多面体

グラフの問題  $\longleftrightarrow$  凸多面体の構造

# 可換代数・代数幾何学の組合せ論への応用

この方向の研究は、Stanley (1970 年代) に始まる.

Stanley :

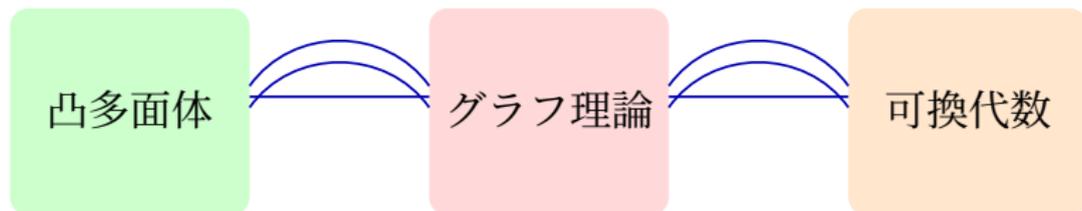
- ▶ Cohen–Macaulay 環理論を組合せ論に導入
- ▶ 単体的球面の面数に関する上限予想を解決

近年の大きな到達点：June Huh らの研究

- ▶ グラフ・マトロイドの特性多項式に関する予想を解決
- ▶ 組合せ論的 Hodge 理論を構築

高度な代数的手法で離散数学の古典的問題を解決

## 分野をつなぐ「橋」



分野間の対応を与える「橋」を構成することが重要

今日は

- ▶ 数え上げ組合せ論の観点からの「凸多面体とグラフ理論」
- ▶ 彩色の変形の観点からの「可換代数とグラフ理論」

の話時間をある限り紹介する。

# 第一部

第一部ではグラフと凸多面体の数え上げに関する以下の論文について基礎知識および背景からはじめ、その結果を紹介する。

-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from bipartite graphs with  $\gamma$ -positivity associated to interior polynomials, *Selecta Math. (N.S.)* **26** (2020), 59.
-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, The  $h^*$ -polynomials of locally anti-blocking lattice polytopes and their  $\gamma$ -positivity, *Discrete Comput. Geom.* **66** (2021), 701–722.
-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Symmetric edge polytopes and matching generating polynomials, *Combin. Theory* **1** (2021), #9.
-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, PQ-type adjacency polytopes of join graphs, *Discrete Comput. Geom.* **70** (2023), 214–235.

## 第二部

第二部ではグラフと可換代数に関する以下の論文についてなるべく代数の知識がなくてもわかるように紹介する。

-  H. Ohsugi, K. Shibata and A. Tsuchiya, *Bull. Lond. Math. Soc.* **55** (2023), 1264–1274.
-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Kempe equivalence and quadratic toric rings, arXiv:2303.12824.
-  K. Motomura, R. Motomura, H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Toric ideals of matching polytopes and edge colorings, arXiv:2501.12824.
-  K. Matsushita and A. Tsuchiya, Codegree and regularity of stable set polytopes, *Algebr. Comb.* **8** (2025), 1743–1751.
-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Examining Kempe equivalence via commutative algebra, *Electron. J. Combin.* **33** (2026), #P1.8.

イントロダクション

凸多面体の数え上げ組合せ論

グラフに付随する格子凸多面体

辺凸多面体

対称辺凸多面体

PQ型隣接凸多面体

# 凸集合

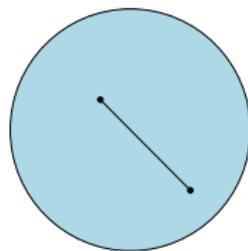
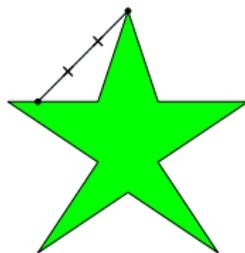
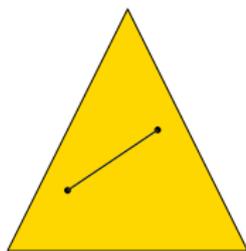
空間  $\mathbb{R}^d$  の 2 点を結ぶ線分とは、部分集合

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

のことである。

## 定義

$\mathbb{R}^d$  の空でない部分集合  $A$  が凸集合 (convex set) であるとは、任意の  $x, y \in A$  に対し、 $[x, y]$  が  $A$  に含まれるときにいう。



# 凸閉包

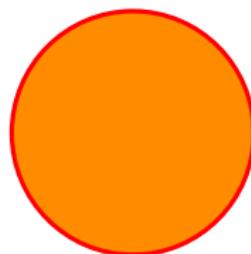
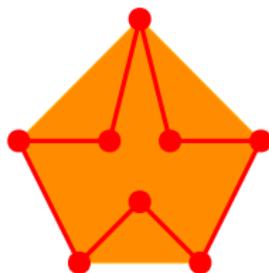
## 定義

部分集合  $X \subset \mathbb{R}^d$  に対し、 $X$  を含む最小の凸集合を  $\text{Conv}(X)$  と書き、 $X$  の凸閉包という。

$X$



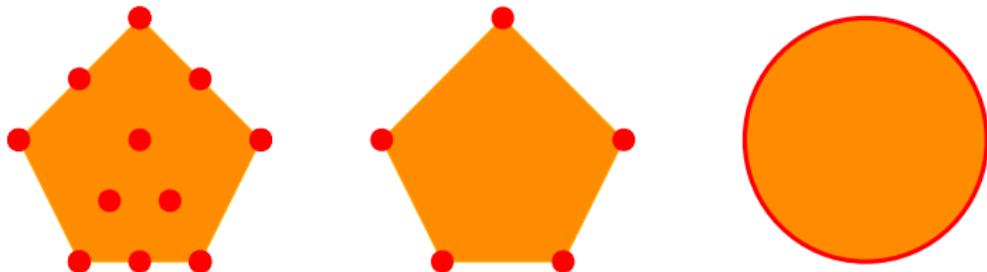
$\text{Conv}(X)$



# 凸多面体

## 定義

部分集合  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  が凸多面体であるとは、有限部分集合  $X \subset \mathbb{R}^d$  が存在して  $\mathcal{P} = \text{Conv}(X)$  と書けるときにいう。



## 定義

凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  に対し、 $\mathcal{P} = \text{Conv}(V)$  となる最小の集合  $V$  を  $\mathcal{P}$  の頂点集合といい、その各点を  $\mathcal{P}$  の頂点という。

# 超平面

空間  $\mathbb{R}^d$  の超平面 (hyperplane) とは  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$  と実数  $b$  を使い,

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b\}$$

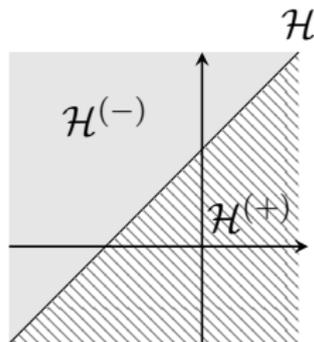
と表示される集合  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$  のことである. ただし,  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  は  $\mathbb{R}^d$  の通常の内積を表し,  $\mathbf{a} \neq (0, \dots, 0) =: \mathbf{0}$  である.

また空間  $\mathbb{R}^d$  の部分集合

$$\mathcal{H}^{(+)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b\},$$

$$\mathcal{H}^{(-)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq b\}$$

を超平面  $\mathcal{H}$  が定義する閉半空間という.



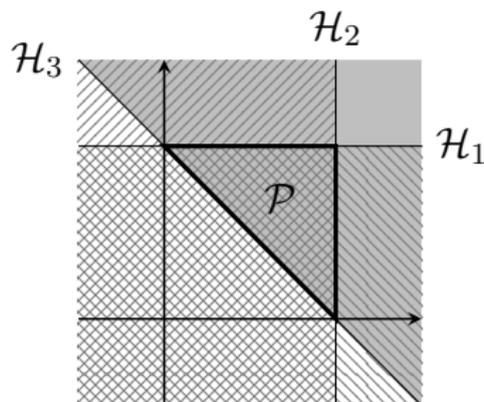
# 超平面による多面体の定義

## 命題

空間  $\mathbb{R}^d$  の有限個の閉半空間  $\mathcal{H}_1^{(+)}, \dots, \mathcal{H}_s^{(+)}$  の共通部分

$$\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^s \mathcal{H}_i^{(+)}$$

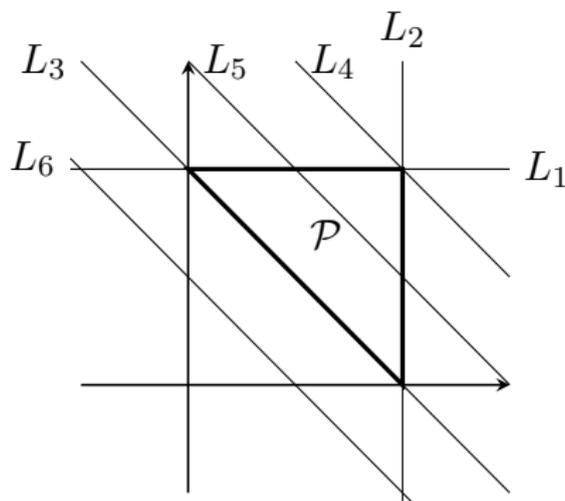
は空でない有界集合であれば、凸多面体である。逆に任意の凸多面体は有限個の閉半空間の共通部分である。



# 支持超平面

凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^d$  の支持超平面とは、次の条件を満たす空間  $\mathbb{R}^d$  の超平面  $\mathcal{H}$  のことである：

- ▶  $P \subset \mathcal{H}^{(+)}$  または  $P \subset \mathcal{H}^{(-)}$  である。
- ▶  $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$  かつ  $P \cap \mathcal{H} \neq P$  である。

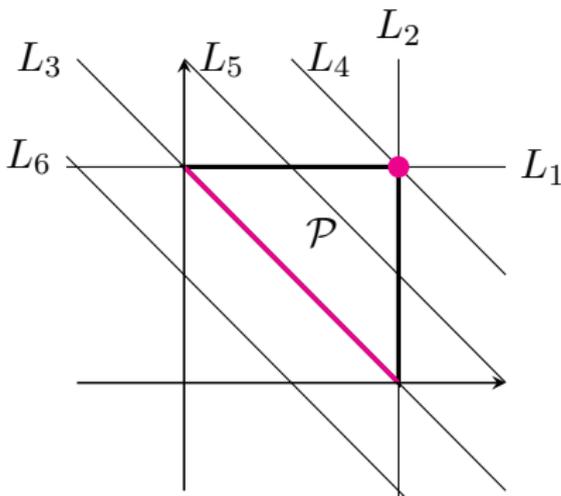


# 面

凸多面体はいつでもある次元の球体と同相である．凸多面体の次元をその同相となる球体の次元として定義する．

## 定義

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  を  $d$  次元凸多面体とし， $\mathcal{H}$  を  $\mathcal{P}$  の支持超平面とする．このとき， $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$  を  $\mathcal{P}$  の面という．特に， $\dim \mathcal{F} = i$  のとき， $i$  面といい，0面のことを頂点，1面のことを辺， $(d-1)$ 面のことをファセットという．

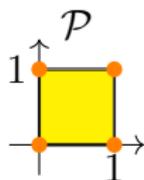


# 格子凸多面体と Ehrhart 多項式

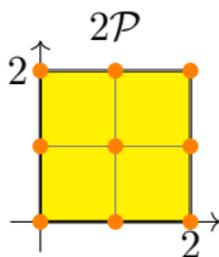
$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  :  $d$ 次元格子凸多面体 ( $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  すべての頂点の成分が整数)

$m\mathcal{P} := \{m\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$  ( $m$  は正の整数)

$L_{\mathcal{P}}(m) := |m\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$

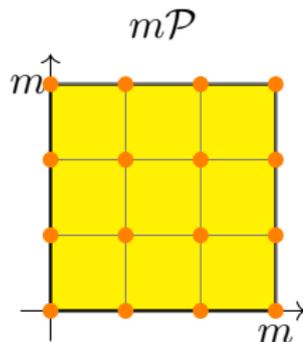


$$L_{\mathcal{P}}(1) = 4$$



$$L_{\mathcal{P}}(2) = 9$$

...



$$L_{\mathcal{P}}(m) = (m + 1)^2$$

## 定理 (Ehrhart)

$L_{\mathcal{P}}(m)$  は  $m$  に関する  $d$  次多項式である。特に最高次の係数は  $\mathcal{P}$  の体積に一致し、定数項は常に 1 である。この多項式  $L_{\mathcal{P}}(m)$  を  $\mathcal{P}$  の Ehrhart 多項式と呼ぶ。

## Ehrhart 級数と $h^*$ 多項式

$$\begin{aligned} \text{Ehr}(\mathcal{P}, t) &:= \sum_{m \geq 0} L_{\mathcal{P}}(m)t^m : \mathcal{P} \text{ の Ehrhart 級数} \\ &= \frac{h_0^* + h_1^*t + \cdots + h_d^*t^d}{(1-t)^{d+1}}, \quad h_0^*, \dots, h_d^* \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

特に,

- ▶  $h_0^* = 1$ ,  $h_1^* = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$ ,  $h_d^* = |\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$ .
- ▶  $h_i^* \geq 0$  (Stanley).
- ▶  $\text{Vol}(\mathcal{P}) = h_0^* + \cdots + h_d^* : \mathcal{P}$  の正規化体積.

この多項式

$$h^*(\mathcal{P}, t) := h_0^* + h_1^*t + \cdots + h_d^*t^d$$

を  $\mathcal{P}$  の  $h^*$  多項式と呼ぶ.

例えば,  $\mathcal{P}$  が長さ 1 の正方形なら  $h^*(\mathcal{P}, t) = 1 + t$  である.

## 次数と余次数

$\mathcal{P}$  の  $h^*$  多項式の次数を  $\deg(\mathcal{P})$  と書き, これを  $\mathcal{P}$  の **次数** という.

$\mathcal{P}$  の次元が  $d$  のとき,

$$\text{codeg}(\mathcal{P}) := d + 1 - \deg(\mathcal{P})$$

を  $\mathcal{P}$  の **余次数** という.

このとき, 次が成り立つ:

- ▶  $\text{codeg}(\mathcal{P}) = \min(k \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{int}(k\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset)$ .
- ▶  $h_{\deg(\mathcal{P})}^* = |\text{int}(\text{codeg}(\mathcal{P})\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$ .

例えば,  $\mathcal{P}$  が長さ 1 の正方形なら

- ▶  $\deg(\mathcal{P}) = 1$ .
- ▶  $\text{codeg}(\mathcal{P}) = 2$ .
- ▶  $h_1^* = 1$ .

# 多項式の性質

$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_st^s$  ( $\forall i, a_i > 0$ ) とする.

(RR)  $f(t)$  が **real-rooted**  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$   $f(t)$  の全ての根が実数.

(LC)  $f(t)$  が **log-concave**  $\stackrel{\text{def}}{\iff} a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq s-1$ ).

(UN)  $f(t)$  が **unimodal**  $\stackrel{\text{def}}{\iff} a_0 \leq \cdots \leq a_k \geq \cdots \geq a_s$  ( $\exists k$ ).

一般に,

$$(RR) \Rightarrow (LC) \Rightarrow (UN)$$

が成り立つ.

- ▶  $1 + 2t + t^2$  : real-rooted
- ▶  $1 + t + t^2$  : non real-rooted だが log-concave
- ▶  $1 + t + 2t^2$  : non log-concave だが unimodal

問

$h^*$  多項式はいつ real-rooted, log-concave, unimodal となるか.

# 整分割性

$\mathcal{P}$  が整分割性 (Integer Decomposition Property) を持つ

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$  任意の  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  と任意の  $\mathbf{x} \in k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$  に対し, ちょうど  $k$  個の格子点  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$  が存在して

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k$$

と書ける. このとき,  $\mathcal{P}$  は IDP であるという.

例えば,

$$\mathcal{P} = \text{Conv}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 2)) \subset \mathbb{R}^3$$

とすると,  $(1, 1, 1) \in 2\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^3$  だが, これは  $\mathcal{P}$  の 2 つの格子点の和で書けない. よって  $\mathcal{P}$  は IDP ではない. また  $h^*(\mathcal{P}, t) = 1 + 0t + t^2$  であり  $h^*(\mathcal{P}, t)$  は unimodal ではない.

## 予想 (Stanley)

$\mathcal{P}$  が IDP ならば,  $h^*(\mathcal{P}, t)$  は unimodal である.

(補足) log-concave でない例は去年発見された.

# 回文的多項式

$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_st^s$  ( $\forall i, a_i \geq 0$ ) に対し,  
 $f(t)$  が回文的  $\stackrel{\text{def}}{\iff} a_i = a_{s-i} (\forall i)$

例えば,  $f(t) = 1 + 7t + 15t^2 + 7t^3 + t^4$  は回文的.

代数的組合せ論で扱われる主な多項式はこの回文的多項式

ではいつ  $h^*(\mathcal{P}, t)$  が回文的となるか.

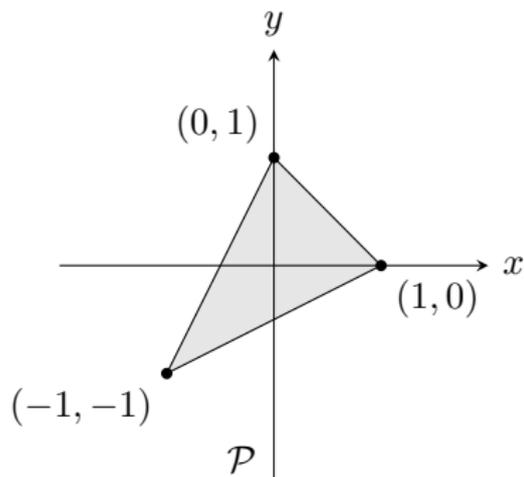
凸多面体の性質で特徴付けられる.

## 双対凸多面体

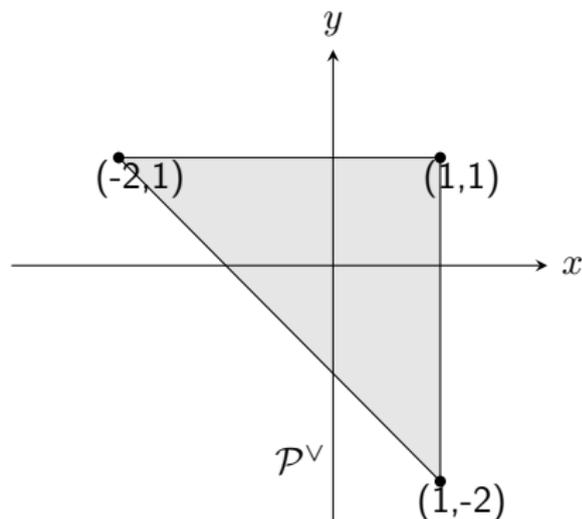
$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  を  $\mathbf{0} \in \text{int}(\mathcal{P})$  を満たす  $d$  次元格子凸多面体とする。このとき、集合

$$\mathcal{P}^\vee := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1 \text{ for all } \mathbf{y} \in \mathcal{P}\}$$

は再び凸多面体となり、これを  $\mathcal{P}$  の双対凸多面体と呼ぶ。



$$h^*(\mathcal{P}, t) = 1 + t + t^2$$

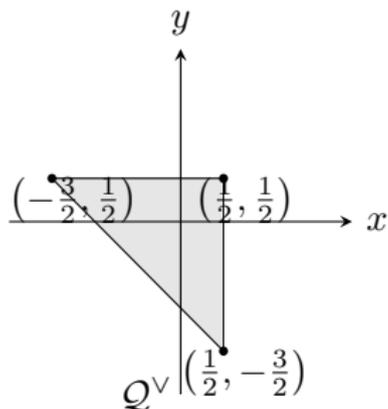
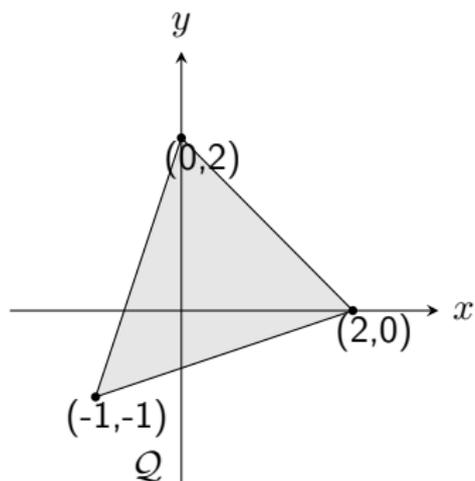


$$h^*(\mathcal{P}^\vee, t) = 1 + 7t + t^2$$

# 反射的凸多面体

## 定義

$\mathbf{0} \in \text{int}(\mathcal{P})$  を満たす  $d$  次元格子凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  が**反射的**であるとは、 $\mathcal{P}^\vee$  が格子凸多面体となるときにいう。



$$h^*(Q, t) = 1 + 4t + 3t^2$$

# Gorenstein 凸多面体と回文的多項式

## 定義

格子凸多面体  $Q \subset \mathbb{R}^d$  が **Gorenstein** であるとは、ある  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$  と  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  が存在して、 $r\mathcal{P} + \mathbf{x}$  が反射的になるときにいう。

$h^*(\mathcal{P}, t)$  の回文性はこの Gorenstein 性を用いて特徴付けられる。

## 定理 (日比)

$h^*(\mathcal{P}, t)$  が回文的であることと、 $\mathcal{P}$  が Gorenstein であることは同値である。

最近のブレークスルーは以下の定理である。

## 定理 (Adiprasito–Papadakis–Petrotou–Steinmeyer)

$\mathcal{P}$  が IDP かつ Gorenstein であれば、 $h^*(\mathcal{P}, t)$  は unimodal である。

## 回文多項式と $\gamma$ 多項式

回文的多項式は  $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_st^s$  ( $a_s \neq 0$ ) は

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \gamma_i t^i (t+1)^{s-2i}$$

という形に一意的にかける.

$\gamma(t) = \sum_{i \geq 0} \gamma_i t^i$  :  $f(t)$  の  $\gamma$  多項式.

		<b>1</b>	<b>7</b>	<b>15</b>	<b>7</b>	<b>1</b>
$f(t) = 1 + 7t + 15t^2 + 7t^3 + t^4$	<b>1</b>	1	4	6	4	1
$= (1+t)^4 + 3t(1+t)^2 + 3t^2$	<b>3</b>		1	2	1	
$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (1, 3, 3)$	<b>3</b>			1		
$\gamma(t) = 1 + 3t + 3t^2$						

## $\gamma$ -positive 性

(GP)  $f(t)$  が  $\gamma$ -positive  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  全ての  $i$  に対し,  $\gamma_i \geq 0$ .

一般に, (RR)  $\Rightarrow$  (GP)  $\Rightarrow$  (UN). もし  $f(t)$  が  $\gamma$ -positive であれば,

$f(t)$  が real-rooted  $\iff \gamma(t)$  が real-rooted

したがって,  $\gamma$  多項式は real-rooted 性を調べる強力な道具.

つい最近, log-concave 性についても以下のことが示された.

### 定理 (Ferroni–Panova–Venturello)

$\gamma(t)$  が log-concave  $\Rightarrow f(t)$  が log-concave

ただし, この定理の逆は成り立たない.

例:  $f(t) = 1 + 8t + 24t^2 + 36t^3 + 24t^4 + 8t^5 + t^6$

$\mathcal{P}$  が Gorenstein のとき,  $\gamma(\mathcal{P}, t)$  で  $h^*(\mathcal{P}, t)$  の  $\gamma$  多項式を表す.

### 問

いつ  $h^*(\mathcal{P}, t)$  は  $\gamma$ -positive か. またそのとき, いつ  $\gamma(\mathcal{P}, t)$  は log-concave, real-rooted か.

イントロダクション

凸多面体の数え上げ組合せ論

グラフに付随する格子凸多面体

辺凸多面体

対称辺凸多面体

PQ 型隣接凸多面体

# グラフに付随する凸多面体

グラフを1つあたえたとき、様々な格子凸多面体が定義できる.

- ▶ 辺凸多面体
- ▶ A型対称辺凸多面体 (PV型隣接凸多面体)
- ▶ B型対称辺凸多面体
- ▶ PQ型隣接凸多面体
- ▶ 安定集合凸多面体
- ▶ マッチング凸多面体
- ▶ カット凸多面体
- ▶ etc ...

格子凸多面体論やグラフ理論だけでなく、様々な分野を背景に定義され、研究されてきている.

イントロダクション

凸多面体の数え上げ組合せ論

グラフに付随する格子凸多面体

辺凸多面体

対称辺凸多面体

PQ 型隣接凸多面体

# 辺凸多面体

$G : [d] := \{1, \dots, d\}$  上有限単純連結グラフ

$E(G) : G$  の辺集合

## 定義

$G$  の辺凸多面体は

$$\mathcal{P}_G := \text{Conv}(\{e_i + e_j : \{i, j\} \in E(G)\})$$

で定義される格子凸多面体である。ここで  $e_1, \dots, e_d$  は  $\mathbb{R}^d$  の標準基底である。

$G$  が二部グラフのときはルート凸多面体とも呼ばれる。

特に、このとき、 $h^*(\mathcal{P}_G, t)$  はグラフの言葉で記述できる。

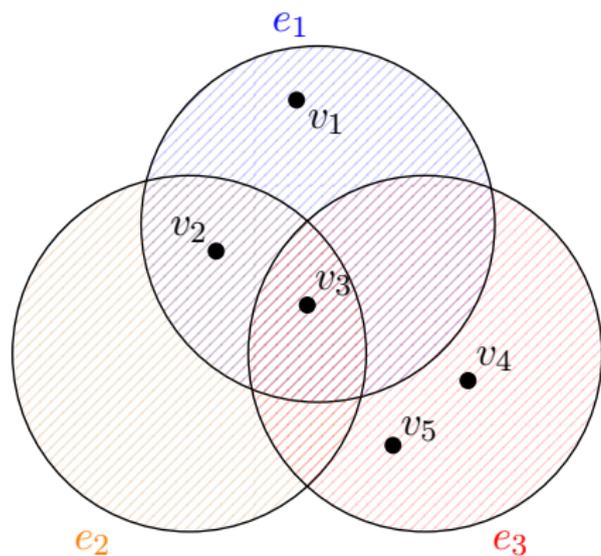
# Hypergraph と二部グラフ

$\mathcal{H} = (V, E)$  : hypergraph

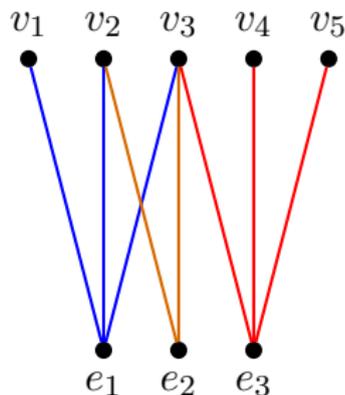
$V = \{v_1, \dots, v_m\}$  :  $\mathcal{H}$  の頂点集合

$E = \{e_1, \dots, e_n\}$  :  $\mathcal{H}$  の hyperedge の集合

$\text{Bip } \mathcal{H}$  : 頂点分割  $V \cup E$ , 辺集合  $\{\{v_i, e_j\} : v_i \in e_j\}$  の二部グラフ



$\mathcal{H}$

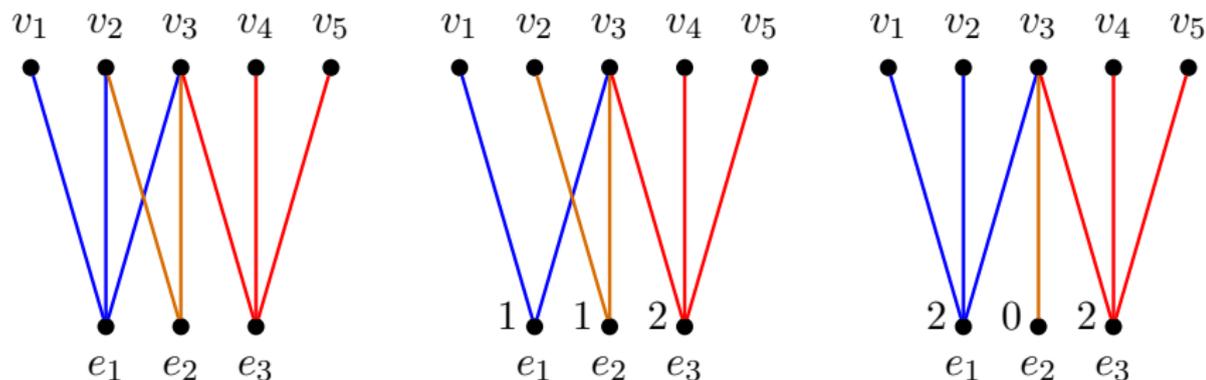


$\text{Bip } \mathcal{H}$

# Hypertree

今,  $\text{Bip}\mathcal{H}$  が連結であると仮定する.

$\mathcal{H}$  の **hypertree** とは, 関数  $f : E \rightarrow \{0, 1, \dots\}$  で,  $\text{Bip}\mathcal{H}$  の spanning tree  $\Gamma$  が存在して, 各 hyperedge  $e \in E$  に対応する頂点の  $\Gamma$  における次数が  $f(e) + 1$  となるものである.



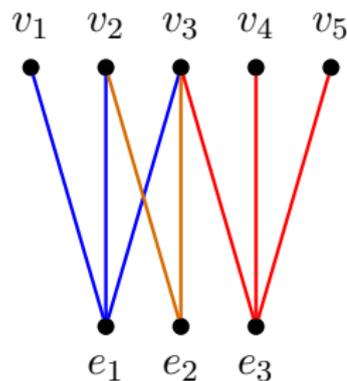
$B_{\mathcal{H}}$  :  $\mathcal{H}$  の hypertree 全体の集合.

## Internally inactive 性

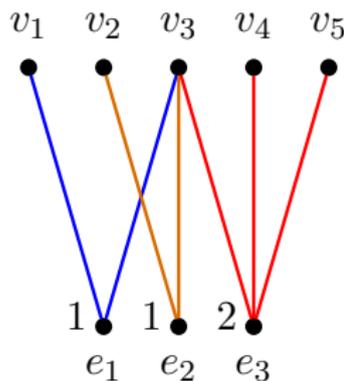
$e_j \in E$  が **internally inactive** w.r.t.  $\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}$  であるとは,  $\mathbf{f}' \in B_{\mathcal{H}}$  と整数  $j' < j$  に関して,

$$\mathbf{f}'(e_i) = \begin{cases} \mathbf{f}(e_i) - 1, & (i = j), \\ \mathbf{f}(e_i) + 1, & (i = j'), \\ \mathbf{f}(e_i), & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

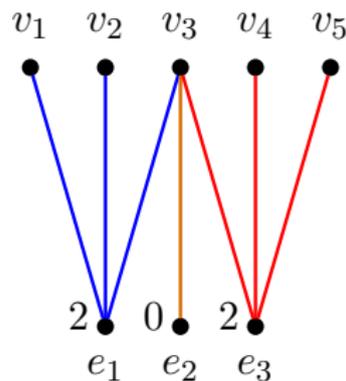
となるものが存在する時に言う.



$\text{Bip } \mathcal{H}$



$e_2$  is internally inactive



# 内部多項式

$\bar{l}(\mathbf{f})$  : internally inactive w.r.t.  $\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}$  な hyperedge の個数.

$\mathcal{H}$  の内部多項式とは

$$I_{\mathcal{H}}(t) := \sum_{\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}} t^{\bar{l}(\mathbf{f})}$$

もし  $G$  がある hypergraph  $\mathcal{H}$  に対して  $G = \text{Bip } \mathcal{H}$  となる連結二部グラフであれば,  $I_G(t) := I_{\mathcal{H}}(t)$  と表記する.

## 補足

もし  $\mathcal{H}$  がグラフで  $T(x, y)$  をその Tutte 多項式とすれば,

$$I_{\mathcal{H}}(t) = t^{|V|-1} T(1/t, 1)$$

# 辺凸多面体の $h^*$ 多項式

## 定理 (Kálmán–Postnikov)

$G$  を連結二部グラフとする. このとき,

$$h^*(\mathcal{P}_G, t) = I_G(t)$$

である, 特に,

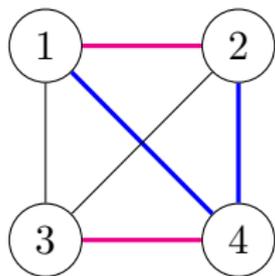
$$\text{Vol}(\mathcal{P}_G) = |B_{\mathcal{H}}|.$$

内部多項式は定義が少し複雑だが,  $G$  が二部サスペンショングラフならマッチングを調べることで計算できる.

# マッチング

## 定義

部分集合  $M \subset E(G)$  が  $G$  の **マッチング** であるとは、 $M$  に属する任意の異なる 2 辺が共有点を持たないものをいう。  $k$  辺からなるマッチングを  $k$  マッチングという。



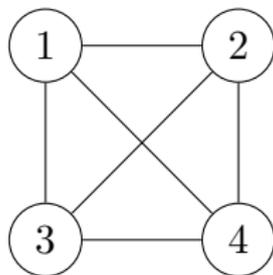
- ▶  $\{12, 34\}$  は 2 マッチング.
- ▶  $\{14, 24\}$  はマッチングではない.

## マッチング生成多項式

$m_k$  を  $G$  の  $k$  マッチングの個数とする。このとき、

$$M(G, t) = \sum_{k \geq 0} m_k t^k$$

を  $G$  の **マッチング生成多項式** という。



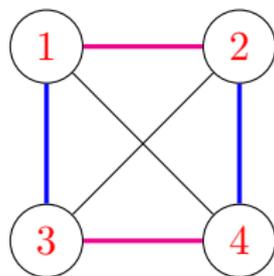
- ▶  $\emptyset \dots 0$  マッチング
- ▶  $\{12\}, \{13\}, \{14\}, \{23\}, \{24\}, \{34\} \dots 1$  マッチング
- ▶  $\{12, 34\}, \{13, 24\}, \{14, 23\} \dots 2$  マッチング

$$\rightsquigarrow M(G, t) = 1 + 6t + 3t^2$$

# マッチング可能集合

## 定義

部分集合  $P \subset [d]$  が  $G$  の **マッチング可能集合** であるとは、 $V$  が  $G$  のあるマッチングの頂点集合となるときにいう。  $2k$  頂点からなるマッチング可能集合を  $k$  マッチング可能集合という。



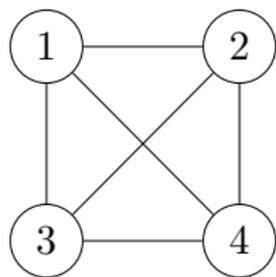
- ▶  $\{1, 2, 3, 4\}$  が 2 マッチングなので、集合  $\{1, 2, 3, 4\}$  は 2 マッチング可能集合である。
- ▶  $\{1, 3, 2, 4\}$  は上とは異なる 2 マッチングであるが、付随する 2 マッチング可能集合は同じ  $\{1, 2, 3, 4\}$  である。

## マッチング可能集合多項式

$pm_k$  を  $G$  の  $k$  マッチング可能集合の個数とする。このとき、

$$PM(G, t) = \sum_{k \geq 0} pm_k t^k$$

を  $G$  の **マッチング可能集合多項式** という。



- ▶  $\emptyset \dots 0$  マッチング可能集合
- ▶  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \dots 1$  マッチング可能集合
- ▶  $\{1, 2, 3, 4\} \dots 2$  マッチング可能集合

$$\rightsquigarrow PM(G, t) = 1 + 6t + t^2$$

# $P(G, t)$ と $PM(G, t)$ の real-rooted 性

## 定理 (Heilmann–Lieb)

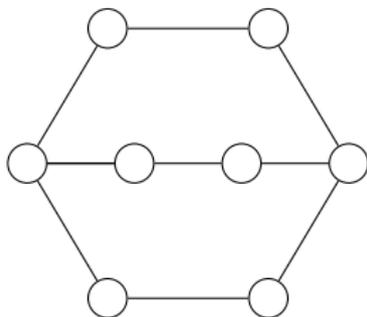
マッチング多項式はいつでも real-rooted である。

## 命題 (大杉–土谷)

マッチング可能集合多項式で real-rooted でないものが存在する。

## 命題 (高橋–土谷)

8 頂点以下のグラフでマッチング可能集合多項式が real-rooted ではないものがただ 1 つ存在する。

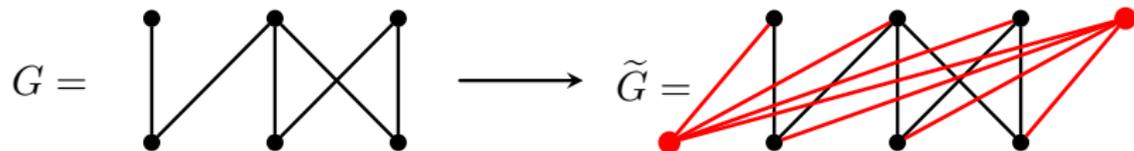


## 二部サスペンション

$G$ : 頂点分割  $V_1 \cup V_2 = [d]$  となる二部グラフ

$\tilde{G}$  を  $[d+2]$  上の連結二部グラフでその辺集合を以下とする:

$$E(\tilde{G}) = E(G) \cup \{\{d+1, d+2\}\} \\ \cup \{\{i, d+1\} : i \in V_1\} \cup \{\{j, d+2\} : j \in V_2\}$$



この操作を二部サスペンションという。

## 二部サスペンショングラフの内部多項式

### 定理 (大杉-土谷)

$G$  を二部グラフとする. このとき,

$$h^*(\mathcal{P}_{\tilde{G}}, t) = I_{\tilde{G}}(t) = PM_G(t)$$

が成り立つ. 特に,  $\text{Vol}(\mathcal{P}_{\tilde{G}})$  は  $G$  のマッチング可能集合の総数である.

### 系

ある二部グラフ  $G$  で  $h^*(\mathcal{P}_G, t)$  が real-rooted にならないものが存在する.

### 問

$h^*(\mathcal{P}_G, t)$  が real-rooted, log-concave, unimodal となるのはいつか.

## 完全二部グラフの場合

完全二部グラフ  $K_{m,n}$  を考える.

命題 (大杉-土谷)

$$PM(K_{m,n}, t) = \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \binom{n}{i} t^i$$

が成り立つ. 特に,  $PM(K_{m,n}, t)$  は real-rooted である.

$K_{m,n} = \widetilde{K_{m-1,n-1}}$  が成り立つので以下の系が従う.

系

$h^*(\mathcal{P}_{K_{m,n}}, t)$  は real-rooted である.

# サボテングラフ

サボテングラフとは、各辺が高々1つのサイクルにしか属さないようなグラフのことである。

## 定理 (大杉-土谷)

グラフ  $G$  をサボテン二部グラフとしたとき、以下が成り立つ。

$$PM(G, t) = g(G, t) + \sum_{R \in \mathcal{R}'_2(G)} (-1)^{c(R)} g(G - R, t) t^{\frac{|E(R)|}{2}}$$

ここで  $\mathcal{R}'_2(G)$  は  $G$  の vertex-disjoint な偶サイクルからなる部分グラフ全体の集合であり、 $c(R)$  は  $R$  に含まれるサイクルの総数、 $E(R)$  は  $R$  の辺集合を表す。

偶サイクル  $C_d$  の場合を考えると、

$$PM(C_d, t) = \frac{(1 + \sqrt{1 + 4t})^d + (1 - \sqrt{1 + 4t})^d}{2^d} - t^{\frac{d}{2}}$$

## real-rooted 性

$$g(G, x) + \sum_{R \in \mathcal{R}'_2(G)} (-1)^{c(R)} g(G - R, x) (x)^{\frac{|E(R)|}{2}}$$

という形の式は化学的グラフ理論に登場する  $\mu$  多項式と関連する.

$\mu$  多項式は **マッチング多項式** と **特性方程式** の両方の一般化である

$\mu$  多項式に関する結果を用いることで以下が証明できる:

### 定理 (大杉-土谷)

カクタス二部グラフ  $G$  に対し  $PM(G, x)$  は real-rooted である.

イントロダクション

凸多面体の数え上げ組合せ論

グラフに付随する格子凸多面体

辺凸多面体

対称辺凸多面体

PQ 型隣接凸多面体

# B型反射的凸多面体

## 定義

$G$  の B 型対称辺凸多面体は

$$B_G := \text{Conv}(\{\pm e_i : i \in [d]\} \cup \{\pm e_i \pm e_j : \{i, j\} \in E(G)\}) \subset \mathbb{R}^d$$

で定義される格子凸多面体である.

## 命題 (大杉-土谷)

$G$  が二部グラフであることと,  $B_G$  が (IDP な) 反射的凸多面体となることは同値である.

したがって,  $G$  が二部グラフであれば,  $h^*(B_G, t)$  は unimodal な回文的多項式である.

## $\mathcal{B}_G$ の $\gamma$ 多項式

### 定理 (大杉-土谷)

$G$  を二部グラフとする. このとき,

$$\gamma(\mathcal{B}_G, t) = I_{\tilde{G}}(4t) = PM_G(4t)$$

である. 特に,  $h^*(\mathcal{B}_G, t)$  は  $\gamma$ -positive であり,

$$h^*(\mathcal{B}_G, t) \text{ が real-rooted} \iff PM(G, t) \text{ が real-rooted}$$

が成り立つ.

したがって, real-rooted 性についても以下が成り立つ.

### 系

$G$  が完全二部グラフまたはカクタス二部グラフのとき,  $h^*(\mathcal{B}_G, t)$  は real-rooted である. また 8 頂点以下の二部グラフで  $h^*(\mathcal{B}_G, t)$  が real-rooted でないものがただ 1 つ存在する.

# A型対称辺凸多面体

一般の単純グラフ  $G$  を考える.

## 定義

$G$  の (A型) 対称辺凸多面体とは

$$\mathcal{A}_G := \text{Conv}(\{\pm(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) : \{i, j\} \in E\}) \subset \mathbb{R}^d$$

で定義される格子凸多面体である. PV型隣接凸多面体とも呼ばれる.

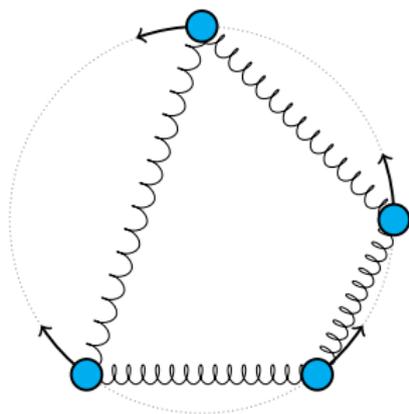
## 命題 (松井-東谷-長澤-大杉-日比)

$\mathcal{A}_G$  は (IDP) な反射的凸多面体である.

したがって,  $h^*(\mathcal{A}_G, t)$  は unimodal な回文的多項式である.

$h^*(\mathcal{A}_G, t)$  の性質を見る前に, 少しこの多面体と他分野の関連について紹介する.

# 蔵本モデル



結合振動子のネットワークは重み付きグラフ  $G = (V, E, A)$  で記述できる：

- ▶ 頂点集合  $V = [d] = \{1, \dots, d\} \leftrightarrow$  振動子
- ▶ 辺集合  $E \leftrightarrow$  結合性
- ▶ 重み  $A = \{a_{ij}\} \leftrightarrow$  結合定数

$\omega_1, \dots, \omega_d$  : 固有振動数

# 蔵本モデル

この時, 系

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - \sum_{j \in N_G(i)} a_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \quad \text{for } i = 1, \dots, d$$

は蔵本モデルと呼ばれており, 同期現象の代表的な数学モデルとして広く知られている.

ここで

- ▶  $\theta_i \in [0, 2\pi)$ :  $i$  番目の振動子の位置を表す偏角
- ▶  $N_G(i)$ : 頂点  $i$  の  $G$  における近傍

$(\theta_1, \dots, \theta_d)$ : 周波数同期配置  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  すべての  $i$  に対して  $\frac{d\theta_i}{dt} = 0$

# 蔵本モデル

## 問

非線形方程式の系

$$\omega_i - \sum_{j \in N_G(i)} a_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, d-1$$

の実数解の個数  $N(G)$  の上限を与えよ.

一般に

$$N(G) \leq \binom{2(d-1)}{d-1}$$

が成り立つ.

グラフの構造に依存したより良い上限は?

## 対称辺凸多面体との関連

$d$  頂点完全グラフ  $K_d$  に対し,

$$\text{Vol}(\mathcal{A}_{K_d}) = \binom{2(d-1)}{d-1}$$

となる。よって,

$$N(G) \leq \text{Vol}(\mathcal{A}_{K_d})$$

である。

より一般に以下が成り立つ。

**定理 (Chen)**

$$N(G) \leq \text{Vol}(\mathcal{A}_G)$$

この結果により,  $h^*(\mathcal{A}_G, t)$  や  $\text{Vol}(\mathcal{A}_G)$  を調べる価値が上がった。

# カット

部分集合  $S \subset [d]$  に対し,

$$E_S := \{e \in E(G) : |e \cap S| = 1\}$$

を  $G$  の **カット** という.



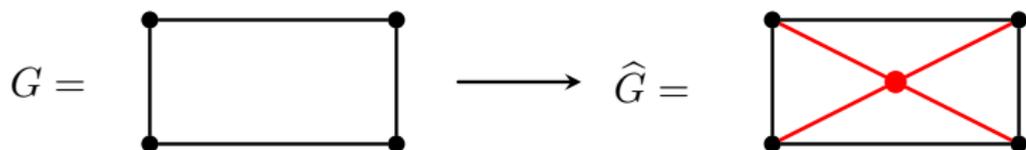
カットは  $G$  の部分二部グラフとして見る事ができる.

$\text{Cut}(G)$  :  $G$  のカット全体の集合  
このとき,  $|\text{Cut}(G)| = 2^{d-1}$  である.

## サスペンショングラフ

$\hat{G}$  を  $[d+1]$  上の連結グラフでその辺集合を以下とする:

$$E(\hat{G}) = E(G) \cup \{\{i, d+1\} : i \in [d]\}.$$



この操作をサスペンションという.

### 定理 (大杉-土谷)

$G$  を  $[d]$  上のグラフとする. この時,

$$\gamma(\mathcal{A}_{\hat{G}}, t) = \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{H \in \text{Cut}(G)} I_{\tilde{H}}(4t) = \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{H \in \text{Cut}(G)} PM(H, 4t).$$

特に  $h^*(\mathcal{A}_{\hat{G}}, t)$  は  $\gamma$ -positive である.

## 二部サスペンションの場合

### 定理 (大杉-土谷)

$G$  を  $[d]$  上の二部グラフとする. このとき,

$$\gamma(\mathcal{A}_{\tilde{G}}, t) = \gamma(\mathcal{A}_{\hat{G}}, t).$$

が成り立つ. 特に,  $h^*(\mathcal{A}_{\tilde{G}}, t)$  は  $\gamma$ -positive である.

この結果により, 以下の公式が復元できる.

### 定理 (東谷-Jochemko-Michałek)

$$h^*(\mathcal{A}_{K_{a+1, b+1}}, t) = \sum_{i=0}^{\min(a, b)} \binom{2i}{i} \binom{a}{i} \binom{b}{i} t^i (1+t)^{a+b+1-2i}$$

## 一般の場合の $\gamma$ -positive 性

これまで以下のグラフのクラスで  $h^*(\mathcal{A}_G, t)$  が  $\gamma$ -positive であることを示した.

### 定理 (大杉-土谷)

以下のグラフのクラスに対し,  $h^*(\mathcal{A}_G, t)$  は  $\gamma$ -positive である:

- ▶ あるグラフ  $H$  に対し,  $G = \widehat{H}$  (完全グラフを含む);
- ▶ ある二部グラフ  $H$  に対し,  $G = \widetilde{H}$  (完全二部グラフを含む)
- ▶  $G$  はサイクル;
- ▶  $G$  は外平面的二部グラフ,

### 予想 (大杉-土谷)

$h^*(\mathcal{A}_G, t)$  は任意のグラフ  $G$  に対し,  $\gamma$ -positive である.

これまでに,  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$  であることは示されている (D'ali-Juhnke-Kubitzke-Köhne-Venturello).

## real-rooted 性

サイクル  $C_d$  を考えると,

$$\gamma(\mathcal{A}_{C_d}, t) = \sum_{i=0}^{(d-1)/2} \binom{2i}{i} t_i.$$

が成り立つので,  $h^*(\mathcal{A}_{C_d}, t)$  は  $\gamma$ -positive である.

しかし,  $d=5$  のとき,  $\gamma(\mathcal{A}_{C_5}, t) = 1 + 2t + 6t^2$  であり, これは real-rooted ではない  $\rightsquigarrow h^*(\mathcal{A}_{C_5}, t)$  も real-rooted ではない.

ではいつ real-rooted となるか.

# カクタスグラフのサスペンション

## 定理 (大杉-土谷)

$G$  を  $[d]$  上のカクタスグラフとする. この時,

$$\gamma(\mathcal{A}_{\widehat{G}}, t) = g(G, 2t) + \sum_{R \in \mathcal{R}'_2(G)} (-2)^{c(R)} g(G - R, 2t) t^{\frac{|E(R)|}{2}}$$

が成り立つ. 特に,  $\gamma(\mathcal{A}_{\widehat{G}}, t)$  は real-rooted である. よって,  $h^*(\mathcal{A}_{\widehat{G}}, t)$  も real-rooted である.

例えば, 車輪グラフ  $W_d := \widehat{C}_d$  の場合,

$$\gamma(\mathcal{A}_{W_d}, t) = \begin{cases} \frac{(1+\sqrt{1+8t})^d + (1-\sqrt{1+8t})^d}{2^d} & \text{if } d \text{ is odd,} \\ \frac{(1+\sqrt{1+8t})^d + (1-\sqrt{1+8t})^d}{2^d} - 2t^{\frac{d}{2}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立ち, これは real-rooted である.

イントロダクション

凸多面体の数え上げ組合せ論

グラフに付随する格子凸多面体

辺凸多面体

対称辺凸多面体

PQ型隣接凸多面体

# PQ型隣接凸多面体

## 定義

$G$  の PQ 型隣接凸多面体は

$$\nabla_G^{PQ} := \text{Conv}(\{(e_i, e_j) \in \mathbb{R}^{2d} : \{i, j\} \in E(G) \text{ or } i = j\})$$

で定義される格子凸多面体である。

## 補足

$\text{Vol}(\nabla_G^{PQ})$  は電力系統の需給バランスを表す電力潮流方程式の実数解の個数の上限を与える (Chen–Mehta)。

次の予想に注目する：

## 予想 (Davis–Chen)

$$\text{Vol}(\nabla_{W_d}^{PQ}) = 3^d - 2^d + 1.$$

## ジョイングラフ

$G_1, G_2$  : 頂点集合  $V_1, V_2$  をもつグラフで,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  とする.

$G_1$  と  $G_2$  の **ジョイン**  $G_1 + G_2$  とは, 頂点集合  $V_1 \cup V_2$  をもち, 辺集合が

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{i, j\} : i \in V_1, j \in V_2\}$$

で与えられるグラフをいう.

### 補足

- ▶  $\hat{G} = G + E_1$  である. ただし,  $E_m$  は  $m$  個の頂点をもつ空グラフ (辺をもたないグラフ) である.
- ▶ 完全多部グラフ  $K_{m_1, \dots, m_s}$  は  $E_{m_1} + \dots + E_{m_s}$  と表される.

## ジョイングラフに対する公式

$[d]$  上のグラフ  $G$  に対し,  $[d] \cup [\bar{d}]$  上の二部グラフ  $D(G)$  を

$$E(D(G)) = \{\{i, \bar{j}\}, \{\bar{i}, j\} : \{i, j\} \in E(G)\} \cup \{\{i, \bar{i}\} : i \in [n]\}$$

で定義する. このとき,  $\nabla_G^{\text{PQ}}$  は  $\mathcal{P}_{D(G)}$  に同型 (Chen–Davis).

### 定理 (大杉–土谷)

$G_1, \dots, G_s$  をそれぞれ  $m_1, \dots, m_s$  頂点の vertex-disjoint なグラフとする. このとき,  $m = \sum_{i=1}^s m_i$  頂点グラフ  $G = G_1 + \dots + G_s$  に対し,

$$\begin{aligned} h^*(\nabla_G^{\text{PQ}}, t) &= \sum_{i=1}^s PM(D(G_i + K_{m-m_i-1}), t) \\ &\quad - (s-1) \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k}^2 t^k. \end{aligned}$$

が成り立つ.

# 完全多部グラフ

正の整数  $\ell$  と  $m$  に対し，次の多項式を定義する：

$$f_{\ell,m}(t) = \sum_{k=0}^{\ell+m-1} \sum_{\alpha=0}^k \binom{\ell-1}{k-\alpha} \binom{m}{\alpha} \sum_{\beta=\alpha}^k \binom{\ell+\alpha-1}{\beta} \binom{m-\alpha}{k-\beta} t^k.$$

## 定理 (大杉-土谷)

$$h^*(\nabla_{K_{\ell+E_m}}^{\text{PQ}}, t) = f_{\ell,m}(t).$$

## 系

$$h^*(\nabla_{K_{m_1, \dots, m_s}}^{\text{PQ}}, t) = \sum_{i=1}^s f_{m-m_i, m_i}(t) - (s-1) \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k}^2 t^k.$$

## 系 (Chen-Davis)

$$\text{Vol}(\nabla_{K_{2, n-2}}^{\text{PQ}}) = 2^{n-4}(n^2 - n + 6) - 2.$$

# 第一部のまとめ

グラフなどの組合せ論的对象から構成される格子凸多面体は、格子凸多面体論の中心的研究対象の一つである。

本質的な研究課題は次の3点に集約される：

- (1) 格子凸多面体の不変量をグラフの情報から計算する
- (2) 格子凸多面体の性質をグラフの性質から導く
- (3) 逆に、格子凸多面体の不変量や性質がグラフに何を語るか

また

- ▶ 格子凸多面体論は、可換代数や代数幾何学と融合して発展。
- ▶ 格子凸多面体を介してグラフと代数を結ぶことで、グラフ理論でも同様の発展が期待できる。

第二部では可換代数に焦点を当て  
グラフ理論との関係を紹介