

格子凸多面体と可換代数とグラフ理論と

Part II

土谷 昭善

東邦大学・理学部

第 22 回組合せ論若手研究集会
慶應義塾大学 矢上キャンパス
2026 年 2 月 20 日



Toho University

第二部

第二部ではグラフと可換代数に関する以下の論文についてなるべく代数の知識がなくてもわかるように紹介する。

-  H. Ohsugi, K. Shibata and A. Tsuchiya, *Bull. Lond. Math. Soc.* **55** (2023), 1264–1274.
-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Kempe equivalence and quadratic toric rings, arXiv:2303.12824.
-  K. Motomura, R. Motomura, H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Toric ideals of matching polytopes and edge colorings, arXiv:2501.12824.
-  K. Matsushita and A. Tsuchiya, Codegree and regularity of stable set polytopes, *Algebr. Comb.* **8** (2025), 1743–1751.
-  H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Examining Kempe equivalence via commutative algebra, *Electron. J. Combin.* **33** (2026), #P1.8.

安定集合凸多面体の余次数

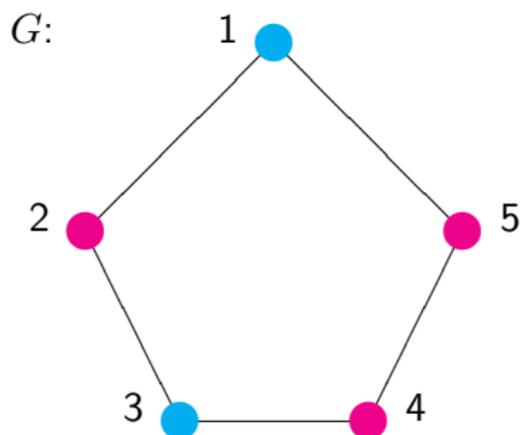
安定集合イデアルと彩色

2次生成性と Kempe 同値

3次以上の生成系と r 色部分グラフ同値

安定集合

- ▶ $S \subset [d]$ が G の安定集合または独立集合
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i, j \in S, \{i, j\} \notin E(G)$
- ▶ $S(G) : G$ の安定集合全体の集合



$\{1, 3\}$: 安定集合 $\{2, 4, 5\}$: 安定集合ではない

$$S(G) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$$

安定集合凸多面体

集合 $X \subset [d]$ に対し, 格子点

$$e_X := \sum_{i \in X} e_i \in \mathbb{R}^d$$

を対応させる.

定義

G の安定集合凸多面体は

$$\mathcal{S}_G := \text{Conv}(\{e_S : S \in \mathcal{S}(G)\})$$

で定義される格子凸多面体である.

補足

G が比較可能グラフ, つまり poset に付随するグラフの場合, \mathcal{S}_G は鎖凸多面体と呼ばれ, 多くの研究がされている.

perfect グラフ

\mathcal{S}_G を考える際、多くの場合は perfect グラフを仮定する.

部分集合 $C \subset [d]$ が G の **クリーク**

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の異なる 2 点 $i, j \in C$ に対して, $\{i, j\}$ が G の辺
 $\iff G$ の C に関する誘導部分グラフ G_C が完全グラフ

$\omega(G) := \max\{|C| : C \text{ は } G \text{ のクリーク}\} : G \text{ の}$ **クリーク数**

$\chi(G) := \min\{k \in \mathbb{Z}_{>0} : G \text{ は } k \text{ 彩色を持つ}\} : G \text{ の}$ **彩色数**

一般に

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

が成り立つ

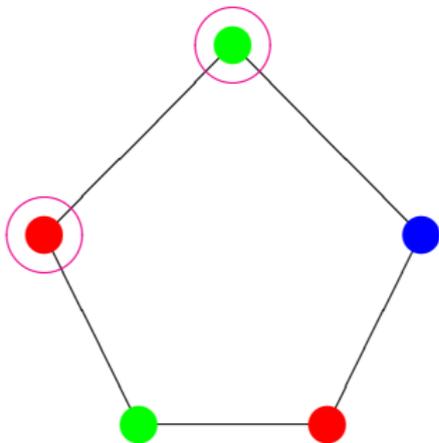
定義

G が **perfect**

$\stackrel{\text{def}}{\iff} G$ の任意の誘導部分グラフ H に対して $\omega(H) = \chi(H)$

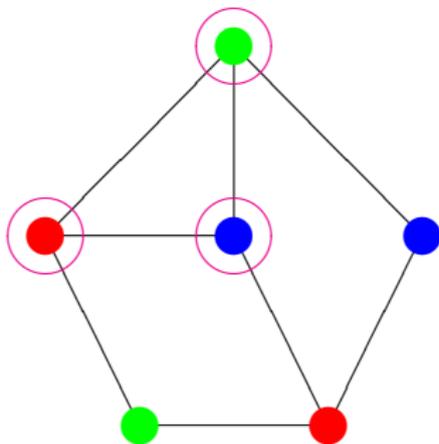
e.g., 二部グラフ, 弦グラフ, 比較可能グラフ

G :



$$\omega(G) = 2 < \chi(G) = 3$$

G :



$$\omega(G) = \chi(G) = 3$$

Weak Perfect Graph Theorem

perfect グラフの特徴付けとして以下の定理が知られている。

定理 (Weak Perfect Graph Theorem, Lovász)

G が perfect であることと \overline{G} が perfect であることは同値である。

この定理の証明の 1 つに、安定集合凸多面体を用いた証明がある。

その証明の中で perfect グラフの多面体的な特徴付けが得られる。

定理 (Chvátal)

G が perfect であることと、

$$\mathcal{S}_G = \{(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d : C \text{ は } G \text{ の極大クリーク, } \sum_{i \in C} x_i \leq 1\}$$

となることは同値である。

この結果は最適化の文脈で非常に重要な結果である。

Strong Perfect Graph Theorem

Bergeにより perfect グラフの禁止グラフを用いた特徴付けの予想が提唱され、現在は完全に解決している.

長さが5以上の誘導サイクルを **hole** と呼び、hole の補グラフのことを **antihole** と呼ぶ（長さを4以上で定義する場合もある）

特に、長さが奇数のときは odd hole や odd antihole と呼ぶ.

定理 (Strong Perfect Graph Theorem, Chudnovsky et al.)

G が perfect $\iff G$ は (odd hole, odd antihole)-free

安定集合凸多面体の余次数

格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の余次数とは

$$\text{codeg}(\mathcal{P}) = \min(k \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{int}(k\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset)$$

のことであった.

この不変量が彩色数とクリーク数に関係することが最近わかった.

定理 (松下-土谷)

任意のグラフ G に対し,

$$\omega(G) \leq \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 \leq \chi(G)$$

が成り立つ. 特に, G が perfect ならば,

$$\omega(G) = \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 = \chi(G)$$

である.

この3つの不変量が真に異なることを見ていく.

h -perfect グラフ

G が h -perfect であるとは、以下の等式が成り立つときにいう：

$$\mathcal{S}_G = \left\{ \mathbf{x} \in [0, 1]^d : \begin{array}{ll} \sum_{i \in Q} x_i \leq 1, & \text{for any clique } Q \\ \sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2}, & \text{for any odd cycle } C \end{array} \right\}.$$

定理 (宮崎, 松下-土谷)

G が h -perfect ならば、

$$\omega(G) = \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 \leq \chi(G).$$

が成り立つ。

奇サイクル C_d ($d \geq 5$) を考えると、

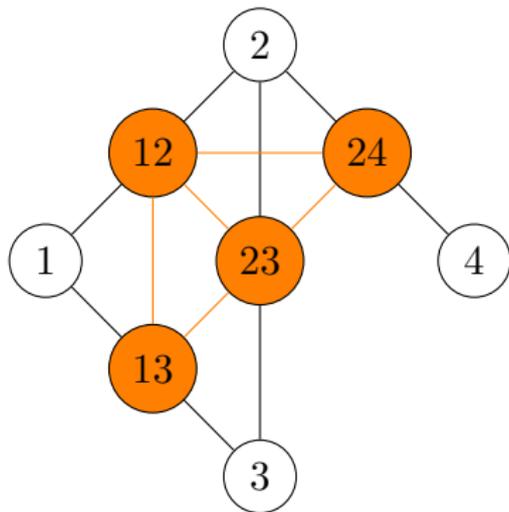
$$\omega(C_d) = \text{codeg}(\mathcal{S}_{C_d}) - 1 < \chi(C_d).$$

がわかる。

line グラフ

G の line グラフ $L(G)$ は頂点集合が $E(G)$, 辺集合が以下のようになるグラフである：

$$\{\{e, e'\} \subset E(G) : e \neq e' \text{ and } e \cap e' \neq \emptyset\}.$$



line グラフの場合の余次数

G の頂点 v に対し, v に接続する辺の本数を v の **次数** といい, $\deg(v)$ と書く.

$\Delta(G) := \max(\deg(v) : v \in [d])$: G の最大次数

定理 (松下-土谷)

連結グラフとする. このとき,

$$\text{codeg}(\mathcal{S}_{L(G)}) = \begin{cases} \Delta(G) + 2 & (G \text{ は奇数頂点の完全グラフ}), \\ \Delta(G) + 1 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

が成り立つ.

奇数頂点の完全グラフ K_d ($d \geq 5$) を考えると

$$\omega(L(K_d)) < \text{codeg}(\mathcal{S}_{L(K_d)}) - 1 = \chi(L(K_d)).$$

がわかる.

不等号の可能性

不等式

$$\omega(G) \leq \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 \leq \chi(G)$$

は以下の 4 パターンの可能性がある：

- (i) $\omega(G) = \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 = \chi(G)$;
- (ii) $\omega(G) < \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 = \chi(G)$;
- (iii) $\omega(G) = \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 < \chi(G)$;
- (iv) $\omega(G) < \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 < \chi(G)$.

すでに (i), (ii), (iii) の例を見た.

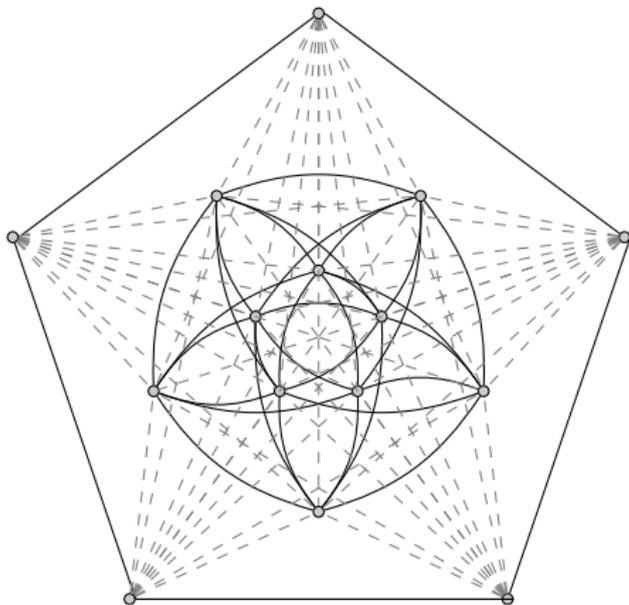
次に (iv) の例を見る.

(iv) の例

以下のグラフ G に対し,

$$\omega(G) < \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 < \chi(G)$$

が成り立つ.



このグラフは $C_5 + L(K_5)$ である.

Open Problem

問

a, b, c を

$$0 < a \leq b \leq c$$

を満たす整数とする. このとき, グラフ G で

$$\omega(G) = a, \quad \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1 = b, \quad \chi(G) = c.$$

を満たすものを見つけよ. つまり, 3つ組

$$(\omega(G), \text{codeg}(\mathcal{S}_G) - 1, \chi(G))$$

を特徴付けよ.

問

$\text{codeg}(\mathcal{S}_G), \text{Vol}(\mathcal{S}_G), h^*(\mathcal{S}_G, t)$ の公式をグラフの言葉で与えよ.

安定集合凸多面体の余次数

安定集合イデアルと彩色

2次生成性と Kempe 同値

3次以上の生成系と r 色部分グラフ同値

安定集合環と安定集合イデアル

ここから代数を絡めた話をする

(ここまでの話も代数が背景にあるが...)

\mathbb{K} : 体 (四則演算ができる代数系, \mathbb{Q} で十分)

2つの多項式環

▶ $R[G] := \mathbb{K}[x_S : S \in S(G)]$ with $\deg x_S = 1$

▶ $\mathbb{K}[\mathbf{t}] := \mathbb{K}[t_0, t_1, \dots, t_d]$ with $\deg(t_0^{a_0} \cdots t_d^{a_d}) = a_0$

を準備する.

さらに, 環準同型写像 $\pi : R[G] \rightarrow \mathbb{K}[\mathbf{t}]$ を以下で定義する:

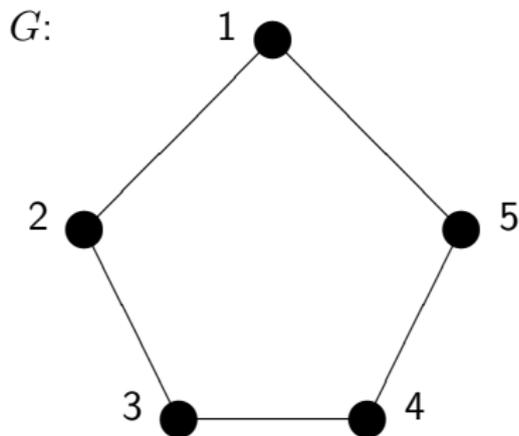
$$x_S \mapsto t_0 \prod_{i \in S} t_i$$

このとき,

▶ $\mathbb{K}[G] := \text{Im}(\pi) = \{\pi(f) : f \in R[G]\}$: 安定集合環

▶ $I_G := \text{Ker}(\pi) = \{f \in R[G] : \pi(f) = 0\}$: 安定集合イデアル

と定義する (一般の格子凸多面体から同様のものが定義できる).



を考えると multi-set として 4 つの安定集合の和集合 $\{1, 3\} \cup \{1, 4\} \cup \{2, 5\} \cup \emptyset$ は $\{3, 5\} \cup \{1, 4\} \cup \{1\} \cup \{2\}$ と一致するので

$$x_{13}x_{14}x_{25}x_{\emptyset} - x_{35}x_{14}x_1x_2 \in I_G$$

となる.

つまり安定集合の族 $\{S_1, \dots, S_r\}$ と $\{S'_1, \dots, S'_r\}$ が multi-set として $\cup S_i = \cup S'_i$ を満たしていれば,

$$x_{S_1}x_{S_2} \cdots x_{S_r} - x_{S'_1}x_{S'_2} \cdots x_{S'_r} \in I_G$$

である. I_G は (本質的には) このような関係を集めてきたもの.

イデアルの生成系

少しイデアルの復習をしよう.

多項式環 $\mathbb{K}[\mathbf{x}] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ とそのイデアル $I \subset \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ を考える. このとき, 部分集合 $F \subset I$ が

$$I = \langle F \rangle := \{f_1g_1 + \dots + f_sg_s : s \geq 1, f_1, \dots, f_s \in F, g_1, \dots, g_s \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]\}$$

を満たすとき, F は I を生成するといい, F を I の生成系という.

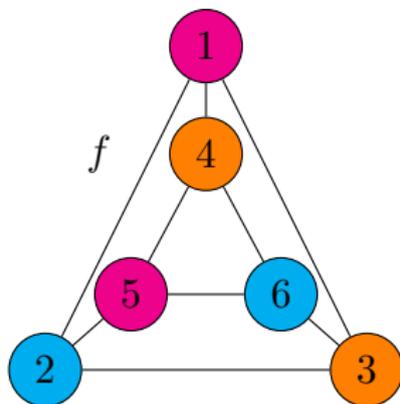
- ▶ 任意のイデアル $I \subset \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ は有限な生成系を持つ.
- ▶ I_G は $\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b$ という形の二項式だけからなる生成系を持つ.

では I_G の生成系をグラフの言葉で記述できないか?

彩色と安定集合

G の k 彩色 $f : [d] \rightarrow [k]$ からいくつかの安定集合が得られる。

実際、同じ色 i の頂点の集合 $f^{-1}(i)$ は G の安定集合である。



$f^{-1}(\text{pink}) = \{1, 5\}$, $f^{-1}(\text{blue}) = \{2, 6\}$, $f^{-1}(\text{orange}) = \{3, 4\}$ は安定集合

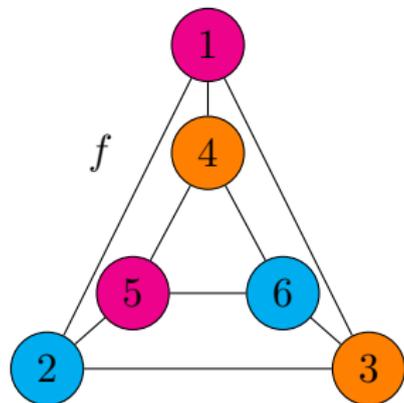
各安定集合はある k 彩色からこの方法で得られる。

彩色と単項式

G の k 彩色 f に対し, $R[G]$ の k 次の単項式

$$\mathbf{x}_f := x_{S_1} x_{S_2} \cdots x_{S_k} \in R[G]$$

を定義する. ただし, $S_i = f^{-1}(i)$ である.



\longleftrightarrow

$$\mathbf{x}_f = x_{15} x_{26} x_{34}$$

G

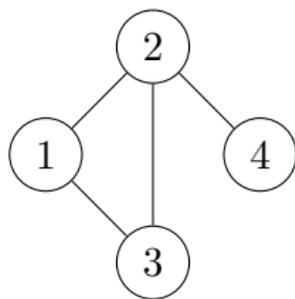
これだと $R[G]$ の全ての単項式を k 彩色を使って表現できない.
例えば, $x_{15} x_{26} x_{34} x_{16}$ など.

複製グラフ

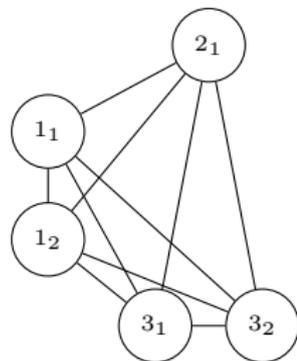
ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ に対し、グラフ $G_{\mathbf{a}}$ を以下で定義する：

- (1) 各頂点 i を a_i 頂点の完全グラフ $G^{(i)}$ で置き換える。ただし、 $a_i = 0$ の場合、頂点 i を削除する。
- (2) $\{i, j\} \in E(G)$ のとき、任意の頂点 $x \in G^{(i)}$ と $y \in G^{(j)}$ に辺をつける。

このグラフ $G_{\mathbf{a}}$ を G の複製グラフという。



G



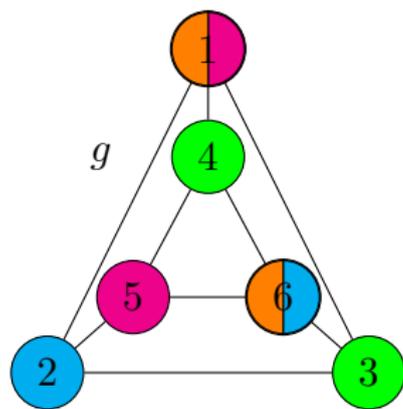
$G_{\mathbf{a}}$ with $\mathbf{a} = (2, 1, 2, 0)$

複製グラフの彩色

G_a の k 彩色 f に対し, $R[G]$ の k 次の単項式

$$\mathbf{x}_f := x_{S_1} x_{S_2} \cdots x_{S_k} \in R[G]$$

を定義する. ただし, $S_i = \{j \in [d] : G^{(j)} \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset\}$ である.



\longleftrightarrow

$$\mathbf{x}_g = x_{15} x_{26} x_{34} x_{16}$$

$$G_{(2,1,1,1,1,2)}$$

$R[G]$ のすべての単項式はこの方法で得られる.

I_G の生成系

定理 (大杉-土谷)

頂点集合 $[d]$ のグラフ G に対し,

$$I_G = \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, k \geq \chi(G_{\mathbf{a}}), f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の } k \text{ 彩色} \rangle$$

となる.

補足

I_G は有限な生成系を持つので、実際は有限個の $\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g$ で本来は表現できる. 特に, G が perfect なら, $k \leq d+1$ を仮定してよい. 一般の場合は?

イデアルの生成系の次数

代数において、イデアル I の極小生成系に含まれる多項式の最大次数は重要な不変量である。

これを $\omega(I)$ と書く（生成系の取り方によらず一定）。

特に、 $\omega(I) = 2$ となるイデアルは非常に良い性質を持つ。

問

I_G はいつ $\omega(I_G) = 2$ となるか。

この問題がグラフ理論の古典的な概念である **Kempe 同値** と繋がった。

安定集合凸多面体の余次数

安定集合イデアルと彩色

2次生成性と Kempe 同値

3次以上の生成系と r 色部分グラフ同値

Kempe 同値

G の k 彩色 f から次の方法で G の新たな k 彩色を得ることができる：

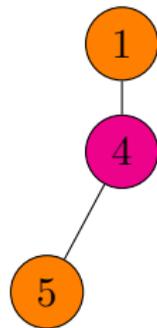
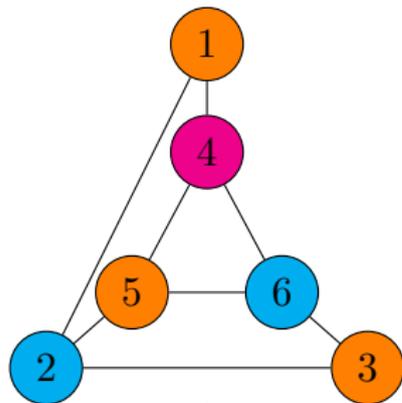
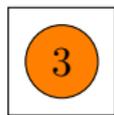
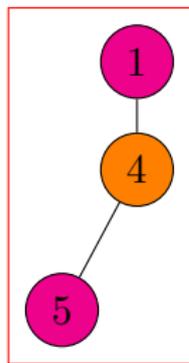
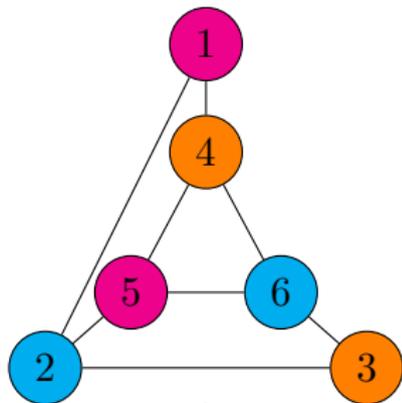
- (1) 2色 $1 \leq i < j \leq k$ を固定し、 i と j の2色のみからなる G の誘導部分グラフを考え、そのグラフの連結成分 H を一つ選ぶ.
- (2) このとき、写像 $g : [d] \rightarrow [k]$ を

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin H, \\ i & x \in H \text{ and } f(x) = j, \\ j & x \in H \text{ and } f(x) = i. \end{cases}$$

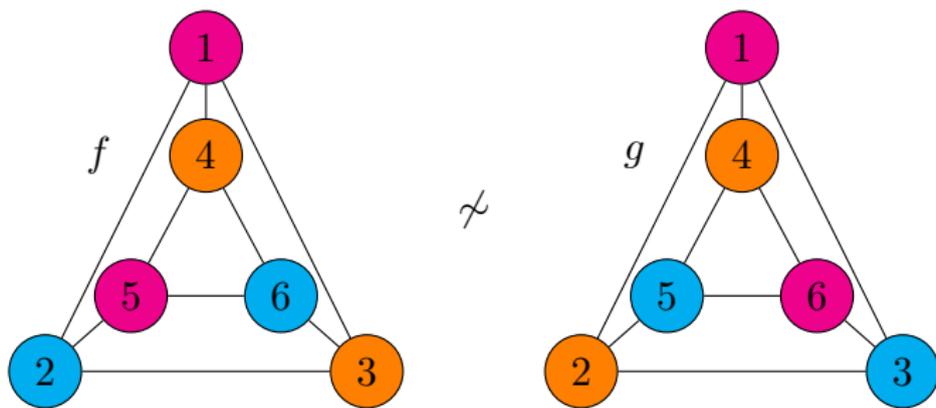
で定義すると、これは G の k 彩色である.

この操作を **Kempe スイッチング** という.

Kempe スイッチングは 1879 年の Kempe による **4 色定理** の **間違っ** た証明の中で導入された.



G の2つの k 彩色 f と g が **Kempe 同値** $f \sim g$ であるとは Kempe スイッチングを繰り返し行うことで f と g が一致するときをいう。



$\text{kc}(G, k) := \{G \text{ の } k \text{ 彩色全体}\} / \sim : k\text{-Kempe 類の集合}$

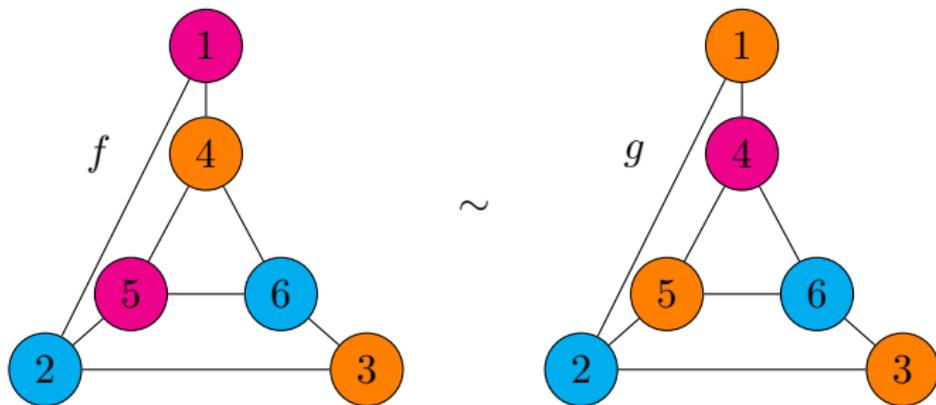
$\text{Kc}(G, k) := |\text{kc}(G, k)|$

問

G の k 彩色がすべて Kempe 同値となるのはいつか？

定理 (大杉-土谷)

頂点集合 $[d]$ のグラフ G に対し, $\omega(I_G) = 2 \iff$ 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ に対し, $G_{\mathbf{a}}$ の k 彩色はすべて Kempe 同値である.



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g &= x_{15}x_{26}x_{34} - x_{135}x_{26}x_4 \\ &= x_{26}(x_{15}x_{34} - x_{135}x_4) \in I_G \end{aligned}$$

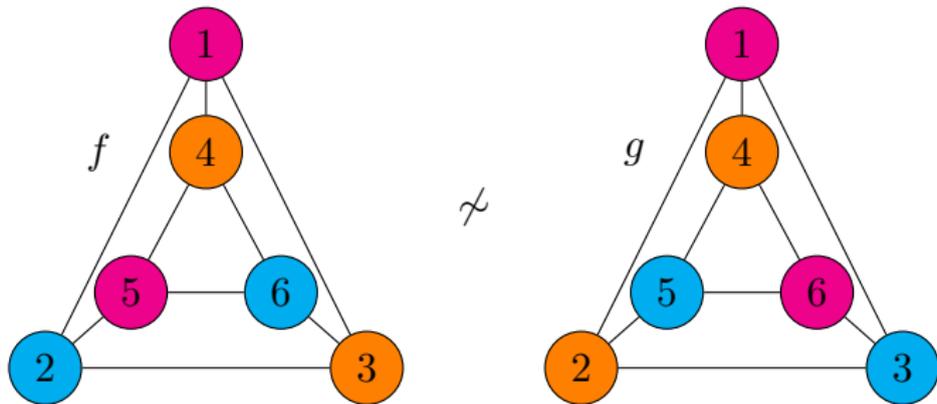
かつ

$$x_{15}x_{34} - x_{135}x_4 \in I_G$$

より, $\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g$ は I_G の 2 次の二項式から生成される.

定理 (大杉-土谷)

頂点集合 $[d]$ のグラフ G に対し, $\omega(I_G) = 2 \iff$ 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ に対し, $G_{\mathbf{a}}$ の k 彩色はすべて Kempe 同値である.



$$\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g = x_{15}x_{26}x_{34} - x_{16}x_{24}x_{35} \in I_G$$

は I_G の 2 次の二項式たちで生成できない.

この定理を perfect グラフに対して適用してみる.

問

G が perfect のとき, $\omega(I_G) = 2$ となるのはいつか?

perfect グラフは代数的な特徴付けも知られている.

定理 (cf. 大杉-日比)

G は perfect $\iff K[G]$ は **compressed**
 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の逆辞書式順序に対して, I_G は
スクエアフリーグレブナー基底を持つ

この結果のように $\omega(I_G) = 2$ をグラフのクラスで特徴付けたい.

予想 (大杉-柴田-土谷)

G が perfect グラフのとき, 次は同値:

- (1) G は **perfectly contractile**
- (2) G は (odd hole, antihole, odd prism)-free
- (3) $\omega(I_G) = 2$

$\{i, j\}$ が G の even pair

$\underset{\text{def}}{\iff} i$ と j を結ぶ chordless path の長さがすべて偶数

even pair $\{x, y\}$ を縮約する

$\underset{\text{def}}{\iff} i$ と j を同一視して辺をつけ直す (ループ辺や多重辺は消す)

G が even contractile

$\underset{\text{def}}{\iff}$ even pair をくり返し縮約することで完全グラフとなるもの

定義 (Bertschi)

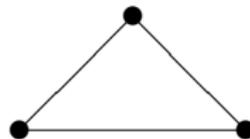
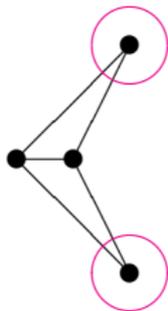
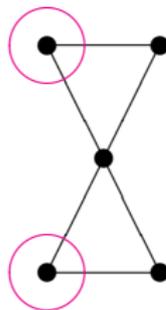
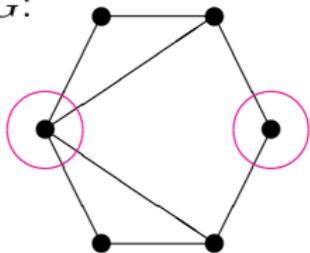
G が perfectly contractile

$\underset{\text{def}}{\iff}$ 任意の誘導部分グラフが even contractile

定理 (Bertschi)

perfectly contractile \implies perfect

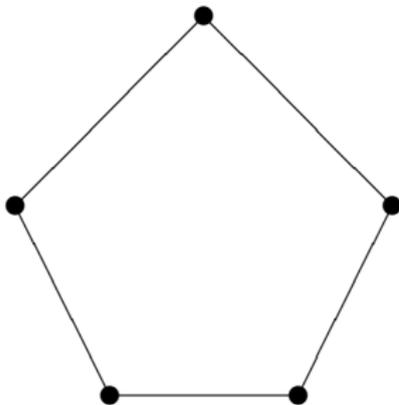
G :



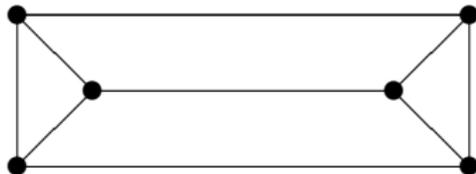
G は even contractile

特に, G は perfectly contractile

C_5 :



$\overline{C_6}$:



C_5 と $\overline{C_6}$ は even pair を持たない
したがって, even contractile ではない

odd prism または odd stretcher $G_{s,t,u}$ とは頂点集合を

$$\{i_1, i_2, \dots, i_{2s}, j_1, j_2, \dots, j_{2t}, k_1, k_2, \dots, k_{2u}\}$$

辺集合を

$$\begin{aligned} & \{i_1, j_1\}, \{i_1, k_1\}, \{j_1, k_1\}, \{i_{2s}, j_{2t}\}, \{i_{2s}, k_{2u}\}, \{j_{2t}, k_{2u}\}, \\ & \{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{2s-1}, i_{2s}\}, \\ & \{j_1, j_2\}, \{j_2, j_3\}, \dots, \{j_{2t-1}, j_{2t}\}, \\ & \{k_1, k_2\}, \{k_2, k_3\}, \dots, \{k_{2u-1}, k_{2u}\}. \end{aligned}$$

とするグラフ



$$G_{1,1,1} = \overline{C_6}$$

予想 (Everett–Reed)

G は perfectly contractile

$\iff G$ は (odd hole, antihole, odd prism)-free

定理 (Linhares Sales–Maffray–Reed)

\implies は正しい

定理 (Bertschi)

以下のグラフは perfectly contractile :

- ▶ Meyniel graph
- ▶ perfectly orderable graph
- ▶ clique separable graph

予想 (大杉-柴田-土谷)

G が perfect グラフのとき、次は同値：

- (1) G は perfectly contractile
- (2) G は (odd hole, antihole, odd prism)-free
- (3) $\omega(I_G) = 2$

定理 (大杉-柴田-土谷)

(3) \implies (2) は正しい ((1) \implies (2) は正しかった)

定理 (Ohsugi-Shibata-T)

以下のグラフに対し $\omega(I_G) = 2$:

- ▶ Meyniel graph
- ▶ perfectly orderable graph (既存の結果をほぼ含む)
- ▶ clique separable graph

定理 (大杉-土谷)

一般の $[d]$ 上のグラフ G に対し,

$$\omega(I_G) = 2 \iff \forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, \forall k \geq \chi(G_{\mathbf{a}}), \text{Kc}(G_{\mathbf{a}}, k) = 1.$$

定理 (Bertschi)

G が perfectly contractile ならば

$$\forall \mathbf{a} \in \{0, 1\}^d, \forall k \geq \chi(G_{\mathbf{a}}), \text{Kc}(G_{\mathbf{a}}, k) = 1.$$

系

perfectly contractile グラフのサブクラス \mathcal{C} が, 条件

$$\forall G \in \mathcal{C}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, G_{\mathbf{a}} \in \mathcal{C}$$

を満たすならば, 任意の $G \in \mathcal{C}$ に対し $\omega(I_G) = 2$ である.

予想 (OST 予想)

G が perfect グラフのとき、次は同値：

- (1) G は perfectly contractile
- (2) G は (odd hole, antihole, odd prism)-free
- (3) $\omega(I_G) = 2$

系

Everett–Reed 予想 ((1) \Leftrightarrow (2)) \Rightarrow OST 予想

系

以下のグラフのクラスに対し $\omega(I_G) = 2$ が成り立つ：

- ▶ (dart, odd hole, antihole, odd prism)-free
- ▶ (odd hole, antihole, ~~odd~~ prism)-free
- ▶ (~~odd~~ hole, antihole, odd prism)-free

予想 (OST 予想のグラフ版)

G が perfect グラフのとき、次は同値：

- (1) G は perfectly contractile
- (2) G は (odd hole, antihole, odd prism)-free
- (3) $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d, \forall k \geq \chi(G_{\mathbf{a}}), \text{Kc}(G_{\mathbf{a}}, k) = 1$

問

G が perfectly contractile のとき、任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ に対し、 $G_{\mathbf{a}}$ は perfectly contractile か？

これが正しければ OST 予想の (1) \Rightarrow (3) が成り立つ。

問

任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ と $k \geq \chi(G_{\mathbf{a}})$ に対し、 $\text{Kc}(G_{\mathbf{a}}, k) = 1$ となる一般のグラフのクラスは何か？

例：almost bipartite グラフ（ある 1 頂点をとり除くと二部グラフとなるグラフ）

Kempe 同値の代数的判定法

横浜国立大学の小関さん：

- ▶ 2つの k 彩色が Kempe 同値か代数的に判定できる？
- ▶ もし Kempe 同値のとき，Kempe スイッチングの列を構成できる？

土谷「いっちょやったるか」

I_G の 2 次の生成系だけで生成されるイデアル $\langle [I_G]_2 \rangle$ を考える：

$$\langle [I_G]_2 \rangle := \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \mid \mathbf{a} \in \{0, 1, 2\}^d, f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の 2 彩色} \rangle$$

系

G の k 彩色 f, g に対し

$$f \sim_k g \iff \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \in \langle [I_G]_2 \rangle$$

右側の条件は「イデアル所属問題」と言われるもの。

つまり、

Kempe 同値の判定 \iff イデアル所属問題

もうちょっと少ない情報で判定できる？

2彩色イデアル

$$\begin{aligned}\langle [I_G]_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \mid \mathbf{a} \in \{0, 1, 2\}^d, f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の 2 彩色} \rangle \\ J_G &:= \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \mid \mathbf{a} \in \{0, 1\}^d, f, g \text{ は } G_{\mathbf{a}} \text{ の 2 彩色} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \mid f, g \text{ は } G \text{ の 誘導部分グラフの 2 彩色} \rangle\end{aligned}$$

J_G を G の **2彩色イデアル** という.

定理 (大杉-土谷)

G の k 彩色 f, g に対し

$$f \sim_k g \iff \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_g \in J_G$$

Kempe イデアル

$$K_G := J_G + \langle x_S x_T \mid S, T \in \mathcal{S}(G), S \cap T \neq \emptyset \rangle$$

K_G を G の **Kempe イデアル** という.

多項式環 $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル I と R の単項式順序 $<$ に対し, $\mathbf{x}^a \notin \text{in}_<(I)$ となる単項式 \mathbf{x}^a を R の $\text{in}_<(I)$ に関する **標準単項式** という.

定理 (大杉-土谷)

$< : R[G]$ の単項式順序

$\{\mathbf{x}_{f_1}, \dots, \mathbf{x}_{f_s}\}$: 次数 k の $\text{in}_<(K_G)$ に関する標準単項式全体の集合

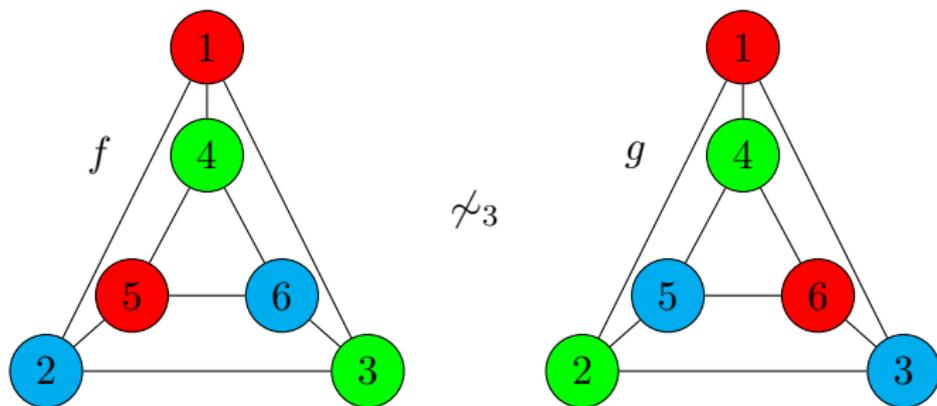
このとき各 f_i は G の誘導部分グラフの k 彩色

さらに G の誘導部分グラフ H に対し

$$\{f_1, \dots, f_s\} \cap \mathcal{C}_k(H)$$

は $\text{kc}(H, k)$ の完全代表系を与える.

例



次数 3 の $\text{in}_<(K_G)$ に関する標準単項式は 65 個存在する.

特に, 標準単項式 $x_{15}x_{26}x_{34}$ と $x_{16}x_{24}x_{35}$ は G の 3 彩色に対応する.

このとき, この 2 つの 3 彩色が $\text{kc}(G, 3)$ の完全代表系となる.

k -Kempe 類の個数と Hilbert 関数

$$\begin{aligned}\text{Hilb}(R/I, t) &:= \dim_{\mathbb{K}}([R/I]_t) : R/I \text{ の Hilbert 関数} \\ &= \#\{\text{次数 } t \text{ の標準単項式全体}\}\end{aligned}$$

$\text{Ind}(G)$: G の誘導部分グラフ全体の集合.

$\text{Ind}_m(G)$: G の m 頂点の誘導部分グラフ全体の集合

系

$$H(R[G]/K_G, k) = \sum_{H \in \text{Ind}(G)} \text{Kc}(H, k).$$

$$\text{Kc}(G, k) = \sum_{m=0}^d (-1)^{d-m} \sum_{H \in \text{Ind}_m(G)} H(R[H]/K_H, k).$$

Hilbert 多項式

$\text{Hilb}(R/I, t)$ に対し, ある多項式 $p_{R/I}$ が存在して, 十分大きい $t \gg 0$ に対し,

$$\text{Hilb}(R/I, t) = p_{R/I}(t)$$

が成り立つ. この多項式 $p_{R/I}$ を R/I の Hilbert 多項式という.

定理 (Mohar)

任意の $k \geq \Delta(G) + 1$ に対して $Kc(G, k) = 1$ である.

系

$[d]$ 上のグラフ G に対し, $R[G]/K_G$ の Hilbert 多項式は 2^d である.

これらの結果とグレブナー基底に関する手法を使えば以下のようなアルゴリズムを得ることができる：

- ▶ Kempe 同値の判定
- ▶ $kc(G, k)$ の完全代表系の計算
- ▶ k -Kempe 類の計算
- ▶ 2つの Kempe 同値な k 彩色を与えたときに，その間の Kempe スイッチングの列の構成

小関さんの質問への答えは Yes! (ただし効率的かと言われると...)

安定集合凸多面体の余次数

安定集合イデアルと彩色

2次生成性と Kempe 同値

3次以上の生成系と r 色部分グラフ同値

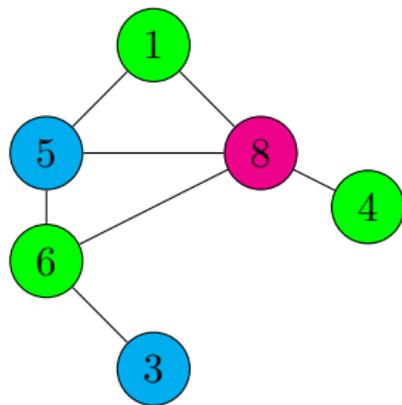
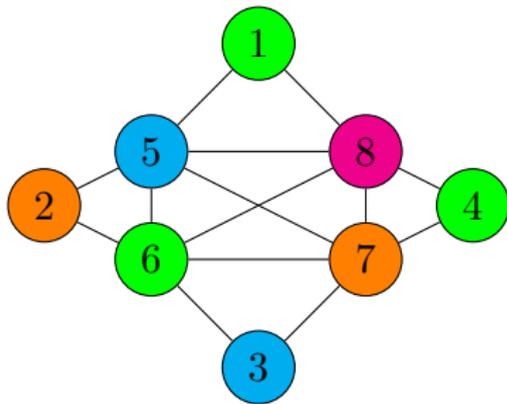
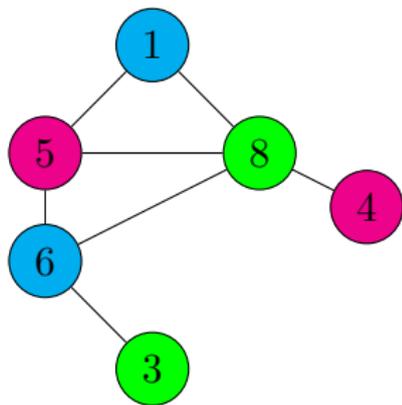
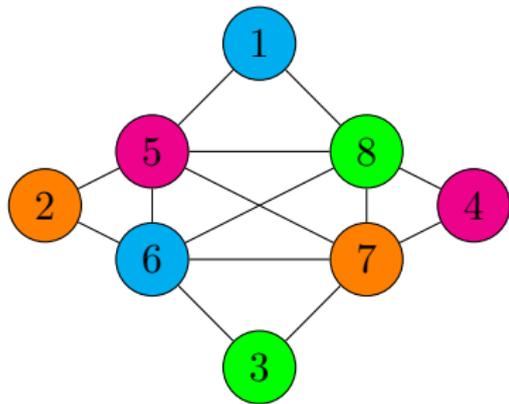
最後に一般の $\omega(I_G)$ について話を広げよう。
そのために、Kempe 同値を拡張する。

G の k 彩色 f から次の方法で G の新たな k 彩色を得ることができる：

1. r 色 $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k$ を固定し、この r 色の頂点のみからなる G の誘導部分グラフ H を考える。
2. H の i_1, \dots, i_r を使った別の r 彩色 g' をとり、写像 $g : [d] \rightarrow [k]$ を

$$g(i) = \begin{cases} g'(i) & i \in H \\ f(i) & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。このとき、 g は G の k 彩色である。
この操作を r 色部分グラフ変形という。



G の2つの k 彩色 f と g が r 色部分グラフ同値 $f \sim_r g$ であるとは r 色部分グラフ変形を繰り返し行うことで f と g が一致するときをいう.

$$\blacktriangleright f \sim g \iff f \sim_2 g$$

定理 (毛利-本村-大杉-土谷)

頂点集合 $[d]$ のグラフ G に対し, $\omega(I_G) \leq r \iff$ 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ に対し, $G_{\mathbf{a}}$ の k 彩色はすべて r 色部分グラフ同値である.

問

上記の定理に登場する r を何かしら G の情報を使って上から抑えられるか?

G が perfect なら $r \leq d + 1$ である (さっき説明).

二部グラフの line グラフの場合はもっと強いことが言える.

代数の結果とグラフの結果の同値性

定理 (Asratian)

G を二部グラフとし, $L(G)$ の頂点数を d とする. このとき, 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ に対し, $L(G)_{\mathbf{a}}$ の k 彩色はすべて 3 色部分グラフ同値である.

この結果とは独立に, 代数の文脈で次の定理が証明されている.

定理 (Domokos–Joó)

G が二部グラフのとき, $\omega(I_{L(G)}) \leq 3$ である.

1 つ前のスライドの定理によりこの 2 つの結果は同値であることがわかる.

グラフ G は $L(G)$ が perfect (resp. perfectly contractile) のとき,
line perfect (resp. line perfectly contractile) という.

例：二部グラフは line perfect

定理 (毛利-本村-大杉-土谷)

G が line perfect なら $I_{L(G)}$ は 3 次以下の二項式で生成される.

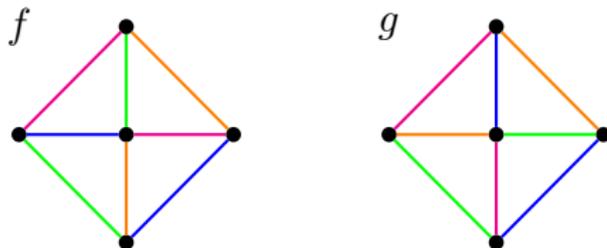
定理 (毛利-本村-大杉-土谷)

G を line perfect とする. このとき, 次は同値:

1. $\omega(I_{L(G)}) = 2$;
2. G は line perfectly contractile ;
3. $L(G)$ は (odd prism)-free ;
4. G は $K_{2,3}$ の奇細分を部分グラフとして持たない.

それ以外の場合は $\omega(I_{L(G)}) = 3$.

以下の4辺彩色を考える.



この2つは3色部分グラフ同値ではない4彩色
↪ このグラフのline グラフの安定集合イデアルの極小生成系には
4次式が含まれる.

予想 (Asratian)

G を正則グラフとする。このとき、 $L(G)$ の k 彩色はすべて 4 色部分グラフ同値である。

予想 (毛利-本村-大杉-土谷)

G が二部とは限らないグラフのとき、 $\omega(I_{L(G)}) \leq 4$ である。

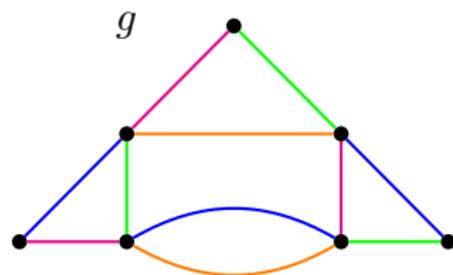
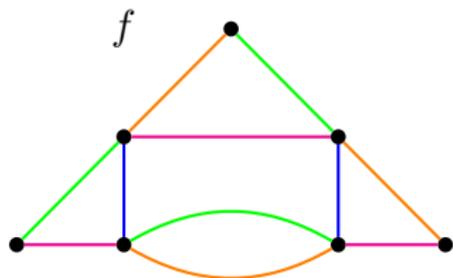
補足 1 : G が完全グラフのときに解決すれば十分

補足 2 : $L(G)_a$ のパーフェクトマッチングに対応する彩色さえ考えれば十分。

補足 3 : $I_{L(G)}$ ではなく、一般の I_G を考えると極小生成系の最高次数はいくらでも大きくできる。

複製グラフが必要な例

もとのグラフのすべての彩色が3色部分グラフ同値であっても、複製グラフの彩色で3色部分グラフ同値とならないものが存在する。



第二部のまとめ

第二部では、**可換代数の問題とグラフ理論の問題を結びつける枠組み**を紹介した。

このような「橋」は、**両方向への寄与**をもたらす。

代表的な例：

- ▶ White 予想：マトロイドイデアルが symmetric base change に対応する 2 次の二項式で生成される。
- ▶ Cut 代数の正規予想： G の Cut 代数が正規であることと G が K_5 -minor-free であることは同値である。
 - ▶ この予想が正しい \Rightarrow 四色定理が従う。

分野を跨ぐ屈強な「橋」を構築し
新たな問題の解決を目指す